Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 3/4/2002

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 2

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI`

(1) Calcule a isometria $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva os pontos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente para os pontos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Como é que se descreve a transformação do plano representada por φ?

Resolução: *A isometria φ que leva os pontos do referencial afim* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *respectivamente para os pontos $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ é dada em coordenadas cartesianas por $\varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ onde $\mathbf{b} = \mathbf{p}$ e A é a matriz real 2×2 com colunas $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ e $\mathbf{r} - \mathbf{p}$. Neste caso fica*

$$\varphi(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

que se descreve como uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{3}$ no sentido positivo e centrada na origem (porque $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$) seguida de uma translação pelo vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

□

(2) Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano. Mostre que G é o baricentro do sistema de massas pontuais $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$ se e só se

$$\lambda|MA|^2 + (1-\lambda)|MB|^2 = |MG|^2 + \lambda|GA|^2 + (1-\lambda)|GB|^2, \quad \forall M \in \mathcal{A}.$$

Resolução: *Pela relação triangular, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ e $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$. Tomando o produto interno destas expressões com elas próprias e somando com pesos λ e $1 - \lambda$ obtém-se*

$$\begin{array}{rcl} \lambda\Big(|MA|^2 & = & |MG|^2 + |GA|^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}\Big), \ \forall M \in \mathcal{A} \\ (1-\lambda)\Big(|MB|^2 & = & |MG|^2 + |GB|^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}\Big), \ \forall M \in \mathcal{A} \\ \hline \lambda|MA|^2 + (1-\lambda)|MB|^2 & = & |MG|^2 + \lambda|GA|^2 + (1-\lambda)|GB|^2 \\ & & +2\overrightarrow{MG}\cdot\Big(\lambda\overrightarrow{GA} + (1-\lambda)\overrightarrow{GB}\Big), \ \forall M \in \mathcal{A}. \end{array}$$

Portanto, a expressão no enunciado é válida se e só se

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{MG}\cdot\Big(\lambda\overrightarrow{GA} + (1-\lambda)\overrightarrow{GB}\Big) = 0, \ \forall M \in \mathcal{A} \\ \iff & \lambda\overrightarrow{GA} + (1-\lambda)\overrightarrow{GB} = 0 \\ \iff & G \text{ é o baricentro do sistema } ((A,\lambda),(B,1-\lambda)). \end{array}$$

□

(3) Mostre que, se uma aplicação qualquer $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ de um espaço vectorial euclidiano preserva o produto interno, i.e.,

$$f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \ , \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ ,$$

então f é uma aplicação linear (e logo é uma isometria linear).

Resolução: *A aplicação f é linear se e só se $f(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = 0$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o que acontece se e só se $||f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})||^2 = 0$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Expandindo e usando o facto de f preservar o produto interno, obtém-se*

$$\begin{aligned}
& ||f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})||^2 \\
= \ & (f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})) \cdot (f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})) \\
= \ & ||f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v})||^2 + \lambda^2||f(\mathbf{u})||^2 + ||f(\mathbf{v})||^2 \\
& -2\lambda f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{u}) - 2\lambda f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) - 2f(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{v}) \\
= \ & ||(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v})||^2 + \lambda^2||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2\lambda(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - 2\lambda\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\
= \ & ||(\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2 \ = \ 0 \ , \qquad\qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

$\square$

(4) Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ subespaços vectoriais de $\mathcal{V}$ tais que $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$. A *reflexão* (ou *simetria*) relativamente a $\mathcal{U}$ e ao longo de $\mathcal{W}$ é a aplicação linear $s : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ dada por $s(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, para $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$, seja $\mathcal{B}$ um subespaço afim com direcção $\mathcal{U}$ e seja $\mathcal{W}$ outro subespaço vectorial tal que $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$. Escolhendo um ponto $B \in \mathcal{B}$, define-se a **reflexão** (ou *simetria*) relativamente a $\mathcal{B}$ e ao longo de $\mathcal{W}$ como sendo a aplicação $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisfaz

$$\overrightarrow{B\sigma(A)} = s(\overrightarrow{BA}) \ , \quad \forall A \in \mathcal{A} \ .$$

Mostre que σ é uma aplicação afim, que σ não depende da escolha do ponto $B \in \mathcal{B}$ e que é uma *involução*, i.e., $\sigma(\sigma(A)) = A$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Resolução: *A aplicação $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ assim definida fixa o ponto B pois*

$$\overrightarrow{B\sigma(B)} = s(\overrightarrow{BB}) = s(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma(B) = B \ .$$

A aplicação σ é afim com aplicação linear associada $\overrightarrow{\sigma} = s$ porque

$$\overrightarrow{\sigma(B)\sigma(A)} = s(\overrightarrow{BA}) \ , \quad \forall A \in \mathcal{A} \ .$$

É propriedade de qualquer aplicação afim φ que a igualdade $\overrightarrow{\varphi(B)\varphi(A)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BA})$ vale para todos os pontos A e B. No caso de σ, também vale para qualquer $B \in \mathcal{A}$, mas para poder substituir $\sigma(B)$ por B há que tomar B em $\mathcal{B}$. Finalmente, como s é uma involução ($s(s(\mathbf{u}+\mathbf{w})) = s(\mathbf{u}-\mathbf{w}) = \mathbf{u}+\mathbf{w}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}$) tem-se, para qualquer $A \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{B\sigma(\sigma(A))} = s(\overrightarrow{B(\sigma(A))}) = s(s(\overrightarrow{BA})) = \overrightarrow{BA} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\sigma(A)) = A \ .$$

$\square$

(5) Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano. Uma reflexão $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ relativamente a $\mathcal{B}$ e ao longo de $\mathcal{W}$ diz-se *ortogonal* se $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é a direcção do subespaço afim $\mathcal{B}$. Mostre que a reflexão σ é uma isometria se e só se for uma reflexão ortogonal.

Resolução: *A reflexão σ é uma isometria se e só se a reflexão linear associada s é uma isometria linear, o que acontece se e só se*

$$
\begin{array}{ll}
 & ||s(\mathbf{u}+\mathbf{w})|| = ||\mathbf{u}+\mathbf{w}|| \ , \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \ , \ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\
\iff & ||\mathbf{u}-\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{u}+\mathbf{w}||^2 \ , \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \ , \ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\
\iff & ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \ , \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \ , \ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\
\iff & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \ , \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \ , \ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\
\iff & \mathcal{U}^\perp = \mathcal{W} \ ,
\end{array}
$$

ou seja, se e só se $\mathcal{W}$ é o complemento ortogonal da direcção de $\mathcal{B}$. $\square$