Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 4/4/2002

GEOMETRIA I – LMAC

FICHA 3 – ÂNGULO E ORIENTAÇÃO

para entregar até à aula teórica de **4ª feira, 17 de Abril**

(1) Mostre que num espaço vectorial euclidiano orientado $\mathcal{V}$ de dimensão 2, uma base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ é positiva se e só se o ângulo orientado $\measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é $\frac{\pi}{2}$.

> **Sugestão:** Relativamente a uma base ortonormal positiva $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}$ escreve-se $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ onde $\theta = \measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

(2) Seja $\mathcal{P}$ um espaço euclidiano de dimensão 2 com direcção $\mathcal{V}$. Seja $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ uma isometria com isometria linear associada $\overrightarrow{\varphi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Descreva φ quando:
(a) $\overrightarrow{\varphi}$ é a identidade;
(b) $\overrightarrow{\varphi}$ é uma reflexão;
(c) $\overrightarrow{\varphi}$ é uma rotação.
Um subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ diz-se **invariante** por φ se $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$; em particular, um conjunto formado por um só ponto fixo é invariante. Quais são os subespaços afins invariantes em cada dos um casos?

> **Sugestão:** Ver o livro pela Michèle Audin.

(3) Seja $\mathcal{P}$ um plano euclidiano com direcção $\mathcal{V}$. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ duas rectas distintas e não paralelas em $\mathcal{P}$, com direcções $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$, respectivamente, e intersectando-se no ponto A. Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{u}' \in \mathcal{U}'$ dois vectores de norma 1.
(a) Mostre que as rectas $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ que passam em A com direcções $\langle \mathbf{u}+\mathbf{u}' \rangle$ e $\langle \mathbf{u}-\mathbf{u}' \rangle$ são ortogonais e a sua união é o conjunto dos pontos equidistantes de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$.

> **Sugestão:** Uma reflexão ortogonal relativamente a $\mathcal{Q}$ (resp., $\mathcal{Q}'$) preserva distâncias e leva $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$.

(b) Verifique que as rectas $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ bisectam os ângulos formados por $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, no sentido em que o ângulo entre $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ é igual ao ângulo entre $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}'$.

(4) Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ uma base ortonormal positiva de um espaço vectorial euclidiano orientado $\mathcal{V}$ de dimensão 3.
(a) Mostre que, para quaisquer vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, tem-se

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} ,$$

onde no lado direito as colunas da matriz são dadas pelos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ escritos na base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
(b) Mostre que o valor absoluto deste número real é o volume do paralelepípedo com arestas dadas pelos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.