Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 17/4/2002

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 3

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI`

(1) Mostre que num espaço vectorial euclidiano orientado $\mathcal{V}$ de dimensão 2, uma base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ é positiva se e só se o ângulo orientado $\measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é $\frac{\pi}{2}$.

Resolução: *Ser* $\theta = \measuredangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ *significa que a rotação de ângulo* θ *no sentido positivo leva* $\mathbf{u}_1$ *para* $\mathbf{u}_2$*. Essa rotação representa-se relativamente a qualquer base o.n. positiva pela matriz* $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$*. Há um e um só vector* $\mathbf{v}$ *tal que* $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}$ *é uma base o.n. positiva. Nesta base escreve-se* $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$*. A matriz de mudança da base* $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}$ *para a base* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ *é* $B = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}$*, cujo determinante* $\det B = \sin\theta$ *é 1 se e só se* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *(módulo* 2π*).* $\square$

(2) Seja $\mathcal{P}$ um espaço euclidiano de dimensão 2 com direcção $\mathcal{V}$. Seja $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ uma isometria com isometria linear associada $\overrightarrow{\varphi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Descreva φ quando:
(a) $\overrightarrow{\varphi}$ é a identidade;
(b) $\overrightarrow{\varphi}$ é uma reflexão;
(c) $\overrightarrow{\varphi}$ é uma rotação.
Um subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ diz-se **invariante** por φ se $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$; em particular, um conjunto formado por um só ponto fixo é invariante. Quais são os subespaços afins invariantes em cada um dos casos?

Resolução: *Quando* $\overrightarrow{\varphi}$ *é a identidade,* φ *é uma translação.*

Quando $\overrightarrow{\varphi}$ *é uma reflexão ortogonal:*
– ou φ *tem algum ponto fixo, e então* φ *é uma reflexão ortogonal relativamente ao hiperplano que passa nesse(s) ponto(s) fixo(s) e com direcção dada pela base da reflexão* $\overrightarrow{\varphi}$*,*
– ou φ *não tem qualquer ponto fixo, e então* φ *é uma* **reflexão deslizante** *("glide reflection" em inglês), ou seja, é a composição de uma reflexão com uma translação ao longo de um vector pertencente à base da reflexão* $\overrightarrow{\varphi}$*.*

Quando $\overrightarrow{\varphi}$ *é uma rotação,* φ *é uma rotação (afim).*

As justificações encontram-se na página 69 do livro (em inglês) pela Michèle Audin.

Um translação (não trivial) não tem qualquer ponto fixo. Qualquer recta com direcção dada pelo vector da translação é um conjunto invariante. Qualquer subespaço invariante por uma translação é uma união de rectas dessas.

Uma reflexão ortogonal tem uma direcção de pontos fixos (os pontos que constituem a recta relativamente à qual se faz a reflexão, e que se chama a **base** *ou* **espelho** *da reflexão). Qualquer recta ortogonal à base da reflexão também é invariante. Para além da recta de pontos fixos e da família de rectas ortogonais a essa, não há mais rectas invariantes.*

Uma reflexão deslizante não tem qualquer ponto fixo. A única recta invariante é a base da reflexão.

Uma rotação (não trivial) tem um único ponto fixo (o seu centro). Não há qualquer recta invariante, a não ser que a rotação seja por ângulo π *(reflexão central) onde qualquer recta que passe no seu centro é invariante.* $\square$

(3) Seja $\mathcal{P}$ um plano euclidiano com direcção $\mathcal{V}$. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ duas rectas distintas e não paralelas em $\mathcal{P}$, com direcções $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$, respectivamente, e intersectando-se no ponto A. Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{u}' \in \mathcal{U}'$ dois vectores de norma 1.

(a) Mostre que as rectas $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ que passam em A com direcções $\langle \mathbf{u}+\mathbf{u}' \rangle$ e $\langle \mathbf{u}-\mathbf{u}' \rangle$ são ortogonais e a sua união é o conjunto dos pontos equidistantes de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$.

Sugestão: Uma reflexão ortogonal relativamente a $\mathcal{Q}$ (resp., $\mathcal{Q}'$) preserva distâncias e leva $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$.

(b) Verifique que as rectas $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ bisectam os ângulos formados por $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, no sentido em que o ângulo entre $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ é igual ao ângulo entre $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}'$.

Resolução:

(a) *As direcções de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ são de facto ortogonais:*

$$(\mathbf{u}+\mathbf{u}') \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{u}') = ||\mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{u}'||^2 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} = 1 - 1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = 0 \ .$$

Considere-se a reflexão ortogonal σ relativamente a $\mathcal{Q}$, com $\overrightarrow{\sigma} = s$. Como $A \in \mathcal{Q}$, tem-se $\sigma(A) = A$. Como $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{u}') + \frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}')$, tem-se $s(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{u}') - \frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}') = \mathbf{u}'$, mostrando que σ leva $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$. Além disso, σ é uma isometria. Se $B \in \mathcal{Q}$ e $C \in \mathcal{R}$, então $|BC| = |B\sigma(C)|$ onde $\sigma(C) \in \mathcal{R}'$. Logo,

$$\begin{aligned} \textit{dist}(B,\mathcal{R}) &= \textit{ínf}\{|BC| : C \in \mathcal{R}\} \\ &= \textit{ínf}\{|B\sigma(C)| : C \in \mathcal{R}\} \\ &= \textit{ínf}\{|BC'| : C' \in \mathcal{R}'\} \\ &= \textit{dist}(B,\mathcal{R}') \ . \end{aligned}$$

Analogamente para um ponto $B' \in \mathcal{Q}'$. Conclui-se que $\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}'$ está contido no conjunto dos pontos equidistantes de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$.
Reciprocamente, suponha-se que B é equidistante de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Seja $H = A + \lambda\mathbf{u}$ a projecção ortogonal de B em $\mathcal{R}$ e $H' = A + \mu\mathbf{u}'$ a projecção ortogonal de B em $\mathcal{R}'$. Como $|BH| = \textit{dist}(B,\mathcal{R}) = \textit{dist}(B,\mathcal{R}') = |BH'|$, tem-se $\lambda = \pm\mu$.
Se $\lambda = \mu$, então a projecção ortogonal de $\sigma(B)$ em $\mathcal{R}'$ é $\sigma(H) = A + \lambda\mathbf{u}' = H'$ e a projecção ortogonal de $\sigma(B)$ em $\mathcal{R}$ é $\sigma(H') = A + \mu\mathbf{u} = H$. Se B e $\sigma(B)$ fossem diferentes, então estes pontos teriam alguma destas projecções ortogonais diferentes (i.e., as suas coordenadas cartesianas no referencial afim $A_0 = A, A_1 = A + \mathbf{u}$, $A_2 = A + \mathbf{u}'$ seriam diferentes). Sendo $B = \sigma(B)$, conclui-se que $B \in \mathcal{Q}$.
Se $\lambda = -\mu$, considera-se a reflexão ortogonal σ' relativamente a $\mathcal{Q}'$ e usa-se um argumento análogo ao anterior para obter que $B = \sigma'(B)$, e logo $B \in \mathcal{Q}'$.

(b) *Reflexões ortogonais preservam ângulos geométricos. Como a reflexão ortogonal σ relativamente a $\mathcal{Q}$ preserva $\mathcal{Q}$ e troca as rectas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, conclui-se que o ângulo entre $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ é igual ao ângulo entre $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}'$, portanto cada um destes ângulos é metade do ângulo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$.*

$\square$

(4) Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ uma base ortonormal positiva de um espaço vectorial euclidiano orientado $\mathcal{V}$ de dimensão 3.

(a) Mostre que, para quaisquer vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, tem-se

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} \ ,$$

onde no lado direito as colunas da matriz são dadas pelos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ escritos na base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

(b) Mostre que o valor absoluto deste número real é o volume do paralelepípedo com arestas dadas pelos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Resolução:

(a) *Relativamente a uma base ortonormal positiva* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, *escreve-se* $\mathbf{u} = \sum a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \sum b_i \mathbf{e}_i$ *e* $\mathbf{w} = \sum c_i \mathbf{e}_i$. *Por bilinearidade tem-se*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{e}_3 \ ,$$

pelo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

(b) *O valor absoluto desse número real é*

$$||(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|| = ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}|| \cdot |\cos \theta| \ , \qquad \textit{onde } \theta = \measuredangle(\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}) \ .$$

Ora, o volume de um paralelepípedo é igual ao produto da área de um dos lados (chamado base) pela altura correspondente a esse lado. Tome-se para base o paralelogramo com lados dados por $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$. *Sabe-se já que a área desse paralelogramo é* $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$. *A altura correspondente é* $||\mathbf{w}|| \cdot |\cos \theta|$, *pois, como* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *é um vector ortogonal a* $\mathbf{u}$ *e a* $\mathbf{v}$, $||\mathbf{w}|| \cdot |\cos \theta|$ *é a norma da projecção ortogonal de* $\mathbf{w}$ *no espaço ortogonal à base.*

$\square$