Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 17/4/2002

GEOMETRIA I – LMAC

FICHA 4 – TRIÂNGULOS E CIRCUNFERÊNCIAS

para entregar até à aula teórica de **4ª feira, 8 de Maio**

(1) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que os ângulos em A e em C têm a mesma medida se e só se os lados AB e BC têm o mesmo comprimento.

Sugestão: Lei dos senos.

(2) Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio R num plano euclidiano. Mostre que:

(a) Se P e P' são os extremos de um diâmetro de $\mathcal{C}$, e A é um outro ponto qualquer de $\mathcal{C}$, então

$$\measuredangle(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0P'}) = 2\measuredangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PP'}) .$$

Sugestão: O triângulo POA é isósceles.

(b) Para um arco $\overline{AB}$ em $\mathcal{C}$ com extremos A e B, e um ponto $P \in \mathcal{C}$ fora do arco $\overline{AB}$, tem-se

$$\measuredangle(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}) = 2\measuredangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) .$$

(c) Se A e B são os extremos de um diâmetro de $\mathcal{C}$, e P é um outro ponto qualquer de $\mathcal{C}$, então o ângulo entre $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ é recto.

(3) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que:

(a) As rectas bissectrizes dos ângulos em A, B e C intersectam-se num ponto P.

Sugestão: Os pontos de ABC sobre a recta bissectriz do ângulo em A são equidistantes dos lados AB e AC.

(b) Existe uma única circunferência $\mathcal{I}$ tangente aos três lados do triângulo ABC; $\mathcal{I}$ chama-se a **circunferência inscrita** no triângulo ABC.

Sugestão: A circunferência $\mathcal{I}$ tem centro P.

(4) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que:

(a) As rectas mediatrizes dos lados AB, BC e CA intersectam-se num ponto O.

Sugestão: A recta mediatriz do lado AB é o conjunto dos pontos equidistantes de A e B.

(b) Existe uma única circunferência $\mathcal{C}$ que passa nos três pontos A, B e C; $\mathcal{C}$ chama-se a **circunferência circunscrita** ao triângulo ABC, ou a circunferência *que circunscreve* o triângulo.

Sugestão: A circunferência $\mathcal{C}$ tem centro O.

(5) Prove a seguinte extensão da lei dos senos:
Seja ABC o triângulo com lados a, b e c opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Mostre que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d ,$$

onde d é o diâmetro da circunferência que circunscreve ABC.