

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 4

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI>

- (1) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que os ângulos em A e em C têm a mesma medida se e só se os lados AB e BC têm o mesmo comprimento.

Resolução: O resultado é consequência da seguinte igualdade dada pela lei dos senos:

$$\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin C}.$$

Se os ângulos em A e em C são iguais, então os denominadores são iguais $\sin A = \sin C$, pelo que os numeradores são iguais $|BC| = |AB|$. Se os lados AB e BC têm o mesmo comprimento, então os numeradores são iguais pelo que os denominadores são iguais $\sin A = \sin C$, donde se conclui que os ângulos geométricos em A e em C ou são iguais ou são complementares. Tratando-se de ângulos internos de um triângulo, o caso $A = \pi - C$ é impossível para um triângulo não degenerado, pois a igualdade $A + B + C = \pi$ implicaria que $B = 0$. \square

- (2) Seja C uma circunferência de centro O e raio R num plano euclidiano. Mostre que:
 (a) Se P e P' são os extremos de um diâmetro de C , e A é um outro ponto qualquer de C , então

$$\angle(\vec{0A}, \vec{0P'}) = 2\angle(\vec{PA}, \vec{PP'}).$$

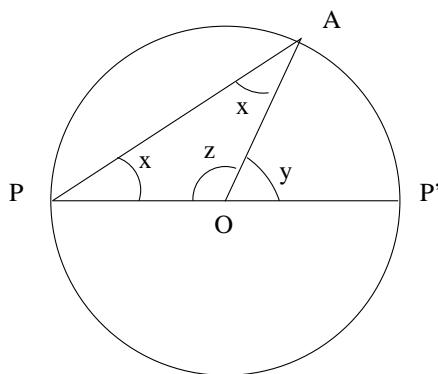
- (b) Para um arco \overline{AB} em C com extremos A e B , e um ponto $P \in C$ fora do arco \overline{AB} , tem-se

$$\angle(\vec{0A}, \vec{0B}) = 2\angle(\vec{PA}, \vec{PB}).$$

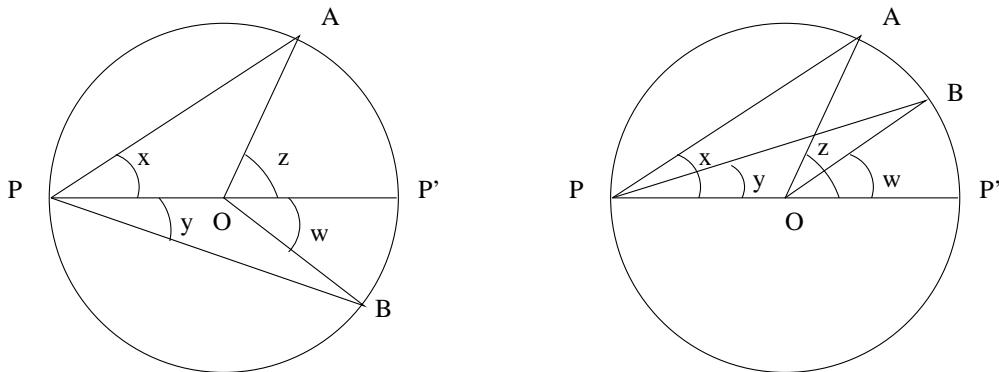
- (c) Se A e B são os extremos de um diâmetro de C , e P é um outro ponto qualquer de C , então o ângulo entre \vec{PA} e \vec{PB} é recto.

Resolução:

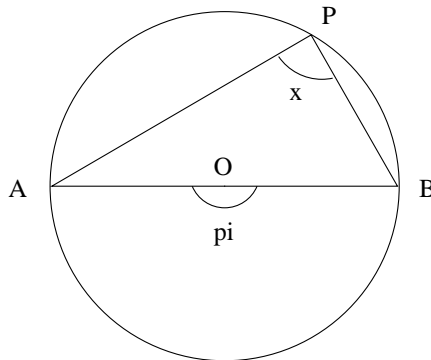
- (a) O triângulo POA é isósceles. Como os ângulos na figura satisfazem $y + z = \pi$ e $2x + z = \pi$, conclui-se que $y = 2x$.



- (b) Seja P' o ponto diametralmente oposto a P . Da alínea (a), tem-se que $z = 2x$ e $w = 2y$, onde x, y, z e w são os ângulos indicados nas figuras. Quando P' está no arco \overline{AB} (figura da esquerda), tem-se que $\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = z + w = 2(x + y) = 2\angle(\vec{PA}, \vec{PB})$. Quando P' está fora do arco \overline{AB} (figura da direita), tem-se que $\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = z - w = 2(x - y) = 2\angle(\vec{PA}, \vec{PB})$. Quando $P' = B$ (o caso $P' = A$ é análogo), tem-se que $y = w = 0$ e ambos os argumentos neste caso limite mostram a igualdade pretendida.



- (c) Considera-se o caso limite da alínea (b) em que os pontos A e B são diametralmente opostos. Como se tem que $\pi = 2x$, conclui-se que o ângulo em P é recto.



□

- (3) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que:
- As rectas bissetrizes dos ângulos em A, B e C intersectam-se num ponto P .
 - Existe uma única circunferência \mathcal{I} tangente aos três lados do triângulo ABC ; \mathcal{I} chama-se a **circunferência inscrita** no triângulo ABC .

Resolução:

- (a) Seja P o ponto de intersecção das rectas bissetrizes dos ângulos em A e em B . Basta mostrar que P pertence à recta bissetriz do ângulo em C . Como os pontos do triângulo ABC sobre a recta bissetriz do ângulo em A (respectivamente, em B) são os pontos de ABC equidistantes dos lados AB e AC (respect., AB e BC), o ponto P está à mesma distância dos lados AB e AC , e à mesma distância dos lados

AB e BC , logo P está à mesma distância dos lados AC e BC . Conclui-se que P pertence à recta bissectriz do ângulo em C .

- (b) Unicidade. A existir uma tal circunferência \mathcal{I} , o seu centro está em ABC e é equidistante de A , B e C , logo é o ponto P da alínea anterior. Uma vez que o ponto de tangência de \mathcal{I} ao lado AB é o ponto de AB mais próximo de P , tem-se que o raio de \mathcal{I} terá que ser a distância de P a AB .

Existência. Seja \mathcal{I} a circunferência de centro P e raio R dado pela distância de P ao lado AB . Como $R = \text{dist}(P, AB) = \text{dist}(P, BC) = \text{dist}(P, AC)$, há exactamente um ponto sobre cada um dos lados AB , BC e AC que pertence à circunferência \mathcal{I} , realizando a distância mínima R . Conclui-se que \mathcal{I} é tangente a AB , a BC e a AC . \square

- (4) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que:

- (a) As rectas mediatrizes dos lados AB , BC e CA intersectam-se num ponto O .
 (b) Existe uma única circunferência \mathcal{C} que passa nos três pontos A , B e C ;
 \mathcal{C} chama-se a **circunferência circunscrita** ao triângulo ABC , ou a circunferência que circunscreve o triângulo.

Resolução:

- (a) Seja O a intersecção das rectas mediatrizes de AB e BC . Basta mostrar que O pertence à recta mediatriz de AC . Como a recta mediatriz de AB (respectivamente, BC) é o conjunto dos pontos equidistantes dos vértices A e B (respect., B e C), o ponto O está à mesma distância de A e de B , e de B e de C , logo O está à mesma distância de A e de C , pelo que pertence à recta mediatriz de AC .
- (b) Unicidade. A existir uma tal circunferência \mathcal{C} , o seu centro é equidistante de A , B e C , logo é o ponto O da alínea anterior. Uma vez que \mathcal{C} deverá passar em A , então o seu raio terá que ser $|OA|$.

Existência. Seja \mathcal{C} a circunferência de centro O e raio $R = |OA|$. Então \mathcal{C} passa em A , B e C porque $R = |OA| = |OB| = |OC|$. \square

- (5) Prove a seguinte extensão da lei dos senos:

Seja ABC o triângulo com lados a , b e c opostos aos vértices A , B e C , respectivamente. Mostre que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d,$$

onde d é o diâmetro da circunferência que circunscreve ABC .

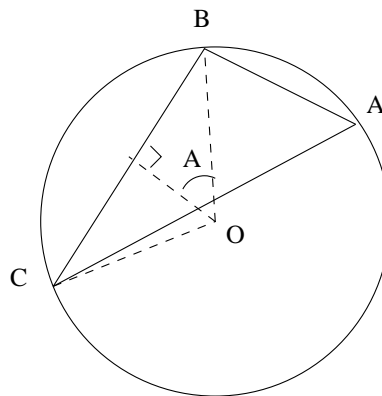
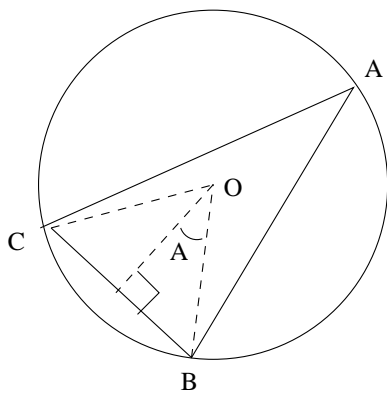
Resolução: Por trigonometria elementar, $b \sin A = h = a \sin B$, onde h é a altura de C (relativamente à base AB) que pode ser vista como o cateto oposto ao ângulo em A (respectivamente B) no triângulo rectângulo com hipotenusa b (respectivamente a). Analogamente $a \sin C = c \sin A$ e $b \sin C = c \sin B$.

Seja O o centro da circunferência que circunscreve o triângulo ABC . Pelo exercício (2)(b), a medida do ângulo em O do triângulo OBC é o dobro da medida do ângulo em A do triângulo ABC . O triângulo OBC é isósceles, sendo $\frac{d}{2}$ o comprimento comum dos lados OB e OC . Considere-se a altura de O para BC que divide OBC em dois triângulos rectângulos, onde o cateto oposto ao ângulo em O mede $\frac{a}{2}$. Tem-se pela definição do seno

que

$$\sin A = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{a}{d},$$

donde resulta a última igualdade a provar.



□