Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 8/5/2002

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 4

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI`

(1) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que os ângulos em A e em C têm a mesma medida se e só se os lados AB e BC têm o mesmo comprimento.

Resolução: *O resultado é consequência da seguinte igualdade dada pela lei dos senos:*

$$\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin C} \ .$$

Se os ângulos em A e em C são iguais, então os denominadores são iguais $\sin A = \sin C$, pelo que os numeradores são iguais $|BC| = |AB|$. Se os lados AB e BC têm o mesmo comprimento, então os numeradores são iguais pelo que os denominadores são iguais $\sin A = \sin C$, donde se conclui que os ângulos geométricos em A e em C ou são iguais ou são complementares. Tratando-se de ângulos internos de um triângulo, o caso $A = \pi - C$ é impossível para um triângulo não degenerado, pois a igualdade $A+B+C = \pi$ implicaria que $B = 0$. $\square$

(2) Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio R num plano euclidiano. Mostre que:

(a) Se P e P' são os extremos de um diâmetro de $\mathcal{C}$, e A é um outro ponto qualquer de $\mathcal{C}$, então

$$\measuredangle(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0P'}) = 2\measuredangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PP'}) \ .$$

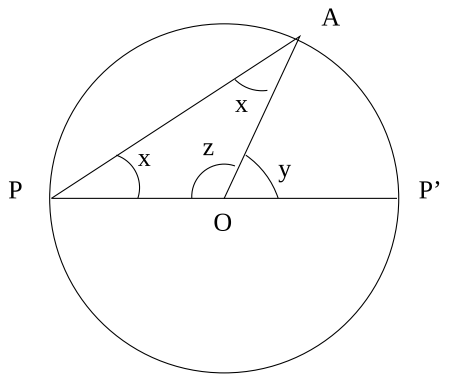
(b) Para um arco $\overline{AB}$ em $\mathcal{C}$ com extremos A e B, e um ponto $P \in \mathcal{C}$ fora do arco $\overline{AB}$, tem-se

$$\measuredangle(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}) = 2\measuredangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) \ .$$

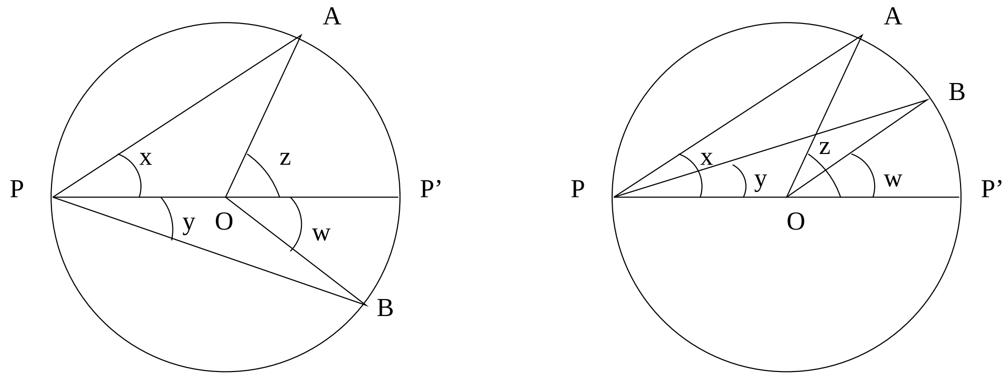
(c) Se A e B são os extremos de um diâmetro de $\mathcal{C}$, e P é um outro ponto qualquer de $\mathcal{C}$, então o ângulo entre $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ é recto.

Resolução:

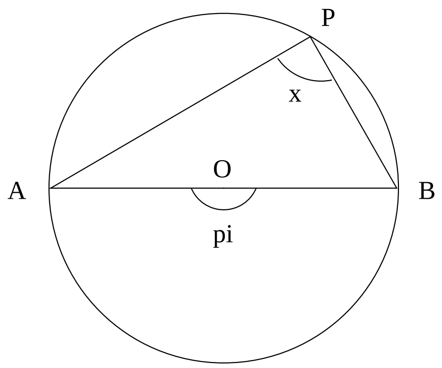
(a) *O triângulo POA é isósceles. Como os ângulos na figura satisfazem $y + z = \pi$ e $2x + z = \pi$, conclui-se que $y = 2x$.*



(b) *Seja P' o ponto diametralmente oposto a P. Da alínea (a), tem-se que $z = 2x$ e $w = 2y$, onde x, y, z e w são os ângulos indicados nas figuras. Quando P' está no arco $\overline{AB}$ (figura da esquerda), tem-se que $\measuredangle(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}) = z + w = 2(x + y) = 2\measuredangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$. Quando P' está fora do arco $\overline{AB}$ (figura da direita), tem-se que $\measuredangle(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}) = z - w = 2(x - y) = 2\measuredangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$. Quando $P' = B$ (o caso $P' = A$ é análogo), tem-se que $y = w = 0$ e ambos os argumentos neste caso limite mostram a igualdade pretendida.*



(c) *Considera-se o caso limite da alínea (b) em que os pontos A e B são diametralmente opostos. Como se tem que $\pi = 2x$, conclui-se que o ângulo em P é recto.*



□

(3) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que:
  (a) As rectas bissectrizes dos ângulos em A, B e C intersectam-se num ponto P.
  (b) Existe uma única circunferência $\mathcal{I}$ tangente aos três lados do triângulo ABC; $\mathcal{I}$ chama-se a **circunferência inscrita** no triângulo ABC.

Resolução:

(a) *Seja P o ponto de intersecção das rectas bissectrizes dos ângulos em A e em B. Basta mostrar que P pertence à recta bissectriz do ângulo em C. Como os pontos do triângulo ABC sobre a recta bissectriz do ângulo em A (respectivamente, em B) são os pontos de ABC equidistantes dos lados AB e AC (respect., AB e BC), o ponto P está à mesma distância dos lados AB e AC, e à mesma distância dos lados*

AB e BC, logo P está à mesma distância dos lados AC e BC. Conclui-se que P pertence à recta bissectriz do ângulo em C.

(b) Unicidade. *A existir uma tal circunferência $\mathcal{I}$, o seu centro está em ABC e é equidistante de A, B e C, logo é o ponto P da alínea anterior. Uma vez que o ponto de tangência de $\mathcal{I}$ ao lado AB é o ponto de AB mais próximo de P, tem-se que o raio de $\mathcal{I}$ terá que ser a distância de P a AB.*
Existência. *Seja $\mathcal{I}$ a circunferência de centro P e raio R dado pela distância de P ao lado AB. Como $R = \text{dist}\ (P, AB) = \text{dist}\ (P, BC) = \text{dist}\ (P, AC)$, há exactamente um ponto sobre cada um dos lados AB, BC e AC que pertence à circunferência $\mathcal{I}$, realizando a distância mínima R. Conclui-se que $\mathcal{I}$ é tangente a AB, a BC e a AC.*

$\square$

(4) Seja ABC um triângulo num plano euclidiano. Mostre que:
(a) As rectas mediatrizes dos lados AB, BC e CA intersectam-se num ponto O.
(b) Existe uma única circunferência $\mathcal{C}$ que passa nos três pontos A, B e C; $\mathcal{C}$ chama-se a **circunferência circunscrita** ao triângulo ABC, ou a circunferência *que circunscreve* o triângulo.

Resolução:
(a) *Seja O a intersecção das rectas mediatrizes de AB e BC. Basta mostrar que O pertence à recta mediatriz de AC. Como a recta mediatriz de AB (respectivamente, BC) é o conjunto dos pontos equidistantes dos vértices A e B (respect., B e C), o ponto O está à mesma distância de A e de B, e de B e de C, logo O está à mesma distância de A e de C, pelo que pertence à recta mediatriz de AC.*
(b) Unicidade. *A existir uma tal circunferência $\mathcal{C}$, o seu centro é equidistante de A, B e C, logo é o ponto O da alínea anterior. Uma vez que C deverá passar em A, então o seu raio terá que ser $|OA|$.*
Existência. *Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro O e raio $R = |OA|$. Então $\mathcal{C}$ passa em A, B e C porque $R = |OA| = |OB| = |OC|$.*

$\square$

(5) Prove a seguinte extensão da lei dos senos:
Seja ABC o triângulo com lados a, b e c opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Mostre que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d\ ,$$

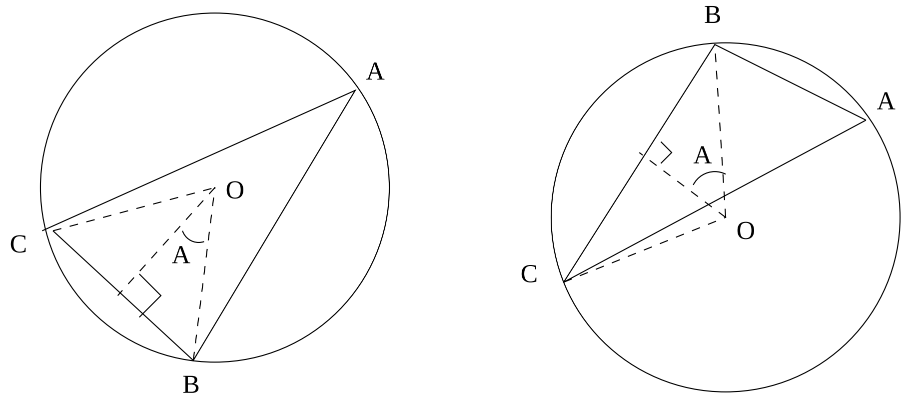
onde d é o diâmetro da circunferência que circunscreve ABC.

Resolução: *Por trigonometria elementar, $b \sin A = h = a \sin B$, onde h é a altura de C (relativamente à base AB) que pode ser vista como o cateto oposto ao ângulo em A (respectivamente B) no triângulo rectângulo com hipotenusa b (respectivamente a). Analogamente $a \sin C = c \sin A$ e $b \sin C = c \sin B$.*

Seja O o centro da circunferência que circunscreve o triângulo ABC. Pelo exercício (2)(b), a medida do ângulo em O do triângulo OBC é o dobro da medida do ângulo em A do triângulo ABC. O triângulo OBC é isósceles, sendo $\frac{d}{2}$ o comprimento comum dos lados OB e OC. Considere-se a altura de O para BC que divide OBC em dois triângulos rectângulos, onde o cateto oposto ao ângulo em O mede $\frac{a}{2}$. Tem-se pela definição do seno *que*

$$\sin A = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{a}{d} \ ,$$

donde resulta a última igualdade a provar.



$\square$