

## GEOMETRIA I – LMAC

### FICHA 5 – INVERSÕES

para entregar até à aula teórica de **4ª feira, 22 de Maio**

A **inversão** do plano  $\mathbb{R}^2$  relativamente a uma circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $R$  é a aplicação

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}, \quad A \longmapsto A',$$

onde a imagem  $A'$  de  $A$  satisfaz  $\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA|^2} \overrightarrow{OA}$ . Todos os exercícios desta ficha dizem respeito à inversão  $i$  relativamente à circunferência de centro  $(0,0)$  e raio 1.

Diz-se que uma recta ou circunferência é **furada** se se lhe removeu um ponto.

- (1) Verifique que  $i$  é uma involução.
- (2) Exprima  $i$  em coordenadas cartesianas  $x, y$ .
- (3) Calcule a imagem por  $i$  da:
  - (a) recta  $2x + 4y = 1$ ;
  - (b) recta  $y = x$  furada na origem.
- (4) Calcule a imagem por  $i$  da:
  - (a) circunferência de centro  $(2, 0)$  e raio 1;
  - (b) circunferência de centro  $(-2, 0)$  e raio 2 furada na origem.
- (5) (a) Mostre que a imagem por  $i$  de uma recta furada na origem é ela própria.  
(b) Mostre que a imagem por  $i$  de uma recta que não passa na origem é uma circunferência furada na origem.
- (6) (a) Mostre que a imagem por  $i$  de uma circunferência que não passa na origem é uma circunferência.  
(b) Mostre que a imagem por  $i$  de uma circunferência furada na origem é uma recta que não passa na origem.
- (7) Seja  $L$  uma recta que não passa na origem e seja  $C = i(L) \cup \{(0, 0)\}$  a circunferência dada pela imagem de  $L$  fechada com a origem. Mostre que a tangente a  $C$  na origem é paralela a  $L$ .

**Sugestão:** Seja  $M$  a recta ortogonal a  $L$  que passa em  $(0, 0)$ . Como  $L$  é simétrica relativamente a  $M$ , a sua imagem  $C$  também é simétrica relativamente a  $M$  – porquê? Considere primeiro o caso em que  $L$  é vertical, por exemplo.

- (8) Mostre que  $i$  preserva ângulos.

**Sugestão:** Basta considerar o caso de duas rectas  $L_1$  e  $L_2$ . Se estas rectas não passam na origem, mostre que, pelo exercício anterior, as suas imagens por  $i$  são circunferências furadas cujas tangentes na origem formam um ângulo igual ao ângulo entre  $L_1$  e  $L_2$ .

- (9) Seja  $D$  uma circunferência que intersecta ortogonalmente a circunferência unitária  $C$  centrada na origem. Mostre que a imagem por  $i$  da circunferência  $D$  é ela própria.

**Sugestão:** Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção de  $D$  e  $C$ . Como pertencem a  $C$ , os pontos  $A$  e  $B$  são fixos por  $i$ . Pelos exercícios (6)(a) e (8), a imagem de  $D$  por  $i$  é uma circunferência que passa por  $A$  e por  $B$  ortogonalmente a  $C$ . Porque é que essa circunferência tem que ser a própria  $D$ ?