Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 8/5/2002

GEOMETRIA I – LMAC

FICHA 5 – INVERSÕES

para entregar até à aula teórica de **4ª feira, 22 de Maio**

A **inversão** do plano $\mathbb{R}^2$ relativamente a uma circunferência C de centro O e raio R é a aplicação

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} , \qquad A \longmapsto A' ,$$

onde a imagem A' de A satisfaz $\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA|^2}\overrightarrow{OA}$. *Todos os exercícios desta ficha dizem respeito à inversão i relativamente à circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.*

Diz-se que uma recta ou circunferência é **furada** se se lhe removeu um ponto.

(1) Verifique que i é uma involução.
(2) Exprima i em coordenadas cartesianas x, y.
(3) Calcule a imagem por i da:
  (a) recta $2x + 4y = 1$;
  (b) recta $y = x$ furada na origem.
(4) Calcule a imagem por i da:
  (a) circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 1;
  (b) circunferência de centro $(-2, 0)$ e raio 2 furada na origem.
(5) (a) Mostre que a imagem por i de uma recta furada na origem é ela própria.
  (b) Mostre que a imagem por i de uma recta que não passa na origem é uma circunferência furada na origem.
(6) (a) Mostre que a imagem por i de uma circunferência que não passa na origem é uma circunferência.
  (b) Mostre que a imagem por i de uma circunferência furada na origem é uma recta que não passa na origem.
(7) Seja L uma recta que não passa na origem e seja $C = i(L) \cup \{(0,0)\}$ a circunferência dada pela imagem de L fechada com a origem. Mostre que a tangente a C na origem é paralela a L.

  Sugestão: Seja M a recta ortogonal a L que passa em $(0,0)$. Como L é simétrica relativamente a M, a sua imagem C também é simétrica relativamente a M – porquê? Considere primeiro o caso em que L é vertical, por exemplo.

(8) Mostre que i preserva ângulos.

  Sugestão: Basta considerar o caso de duas rectas L_1 e L_2. Se estas rectas não passam na origem, mostre que, pelo exercício anterior, as suas imagens por i são circunferências furadas cujas tangentes na origem formam um ângulo igual ao ângulo entre L_1 e L_2.

(9) Seja D uma circunferência que intersecta ortogonalmente a circunferência unitária C centrada na origem. Mostre que a imagem por i da circunferência D é ela própria.

  Sugestão: Sejam A e B os pontos de intersecção de D e C. Como pertencem a C, os pontos A e B são fixos por i. Pelos exercícios (6)(a) e (8), a imagem de D por i é uma circunferência que passa por A e por B ortogonalmente a C. Porque é que essa circunferência tem que ser a própria D?