

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 5

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI>

A **inversão** do plano \mathbb{R}^2 relativamente a uma circunferência C de centro O e raio R é a aplicação

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}, \quad A \longmapsto A',$$

onde a imagem A' de A satisfaz $\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA|^2} \overrightarrow{OA}$. Todos os exercícios desta ficha dizem respeito à inversão i relativamente à circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

Diz-se que uma recta ou circunferência é **furada** se se lhe removeu um ponto.

(1) Verifique que i é uma involução.

Resolução: Para a inversão i relativamente à circunferência de centro O e raio R , seja A' a imagem do ponto A e A'' a imagem de A' . Há que mostrar que $A'' = A$, ou seja que $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA}$. Usando as relações entre A'' , A' e A da definição de i , obtém-se

$$\overrightarrow{OA''} = \frac{R^2}{|OA'|^2} \overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA'|^2} \cdot \frac{R^2}{|OA|^2} \overrightarrow{OA}.$$

Como $|OA'| = \frac{R^2}{|OA|}$, fica

$$\overrightarrow{OA''} = \frac{R^2}{\left(\frac{R^2}{|OA|}\right)^2} \cdot \frac{R^2}{|OA|^2} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}.$$

□

(2) Exprima i em coordenadas cartesianas x, y .

Resolução: Sendo (x, y) as coordenadas cartesianas do ponto A (isto é, $\overrightarrow{OA} = (x, y) - (0, 0)$), as coordenadas cartesianas $(x', y') = i(x, y)$ do ponto imagem A' são dadas por

$$(x', y') = \frac{1^2}{\|(x, y)\|^2} (x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

□

(3) Calcule a imagem por i da:

- (a) recta $2x + 4y = 1$;
- (b) recta $y = x$ furada na origem.

Resolução: Seja M um subconjunto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Como i é uma involução, um ponto (x, y) pertence à imagem de M se e só se $i(x, y) \in M$.

- (a) Seja M a recta de equação $2x+4y = 1$. Pela observação acima, e para $(x, y) \neq (0, 0)$, tem-se

$$\begin{aligned} (x, y) \in i(M) &\iff 2 \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + 4 \cdot \frac{y}{x^2+y^2} = 1 \\ &\iff 2x + 4y = x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5, \end{aligned}$$

logo a imagem desta recta é a circunferência de centro $(1, 2)$ e raio $\sqrt{5}$.

- (b) Seja M a recta de equação $y = x$ furada na origem. Pela observação acima, e para $(x, y) \neq (0, 0)$, tem-se

$$(x, y) \in i(M) \iff \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \iff y = x,$$

logo a imagem desta recta furada na origem é ela própria. Em alternativa, recordando as propriedades da inversão (que preserva direcções, que inverte as normas e que é uma involução), poder-se-ia chegar à mesma conclusão sem efectuar cálculos. \square

- (4) Calcule a imagem por i da:

- (a) circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 1;
 (b) circunferência de centro $(-2, 0)$ e raio 2 furada na origem.

Resolução: Segue-se a estratégia do exercício anterior.

- (a) Seja M a circunferência de equação $(x-2)^2 + y^2 = 1$. Tem-se para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in i(M) &\iff \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = 1 \\ &\iff \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + 4 - \frac{4x}{x^2+y^2} = 1 \\ &\iff 1 + 4(x^2+y^2) - 4x = x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

logo a imagem de M é a circunferência de centro $(\frac{2}{3}, 0)$ e raio $\frac{1}{3}$.

- (b) Seja M a circunferência de equação $(x+2)^2 + y^2 = 4$ furada na origem. Tem-se para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in i(M) &\iff \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 2\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = 4 \\ &\iff \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + 4 + \frac{4x}{x^2+y^2} = 4 \\ &\iff 1 + 4x = 0, \end{aligned}$$

logo a imagem de M é a recta vertical $x = -\frac{1}{4}$. \square

- (5) (a) Mostre que a imagem por i de uma recta furada na origem é ela própria.
 (b) Mostre que a imagem por i de uma recta que não passa na origem é uma circunferência furada na origem.

Resolução:

- (a) Seja L uma recta furada na origem. Por definição de i qualquer ponto de L no interior de C é imagem de um ponto de L fora de C e vice-versa. Os pontos de $C \cap L$ são fixos por i . Conclui-se que a imagem de L por i é ela própria. Equivalentemente poder-se-ia demonstrar a afirmação usando coordenadas cartesianas.

- (b) Seja L uma recta de equação $ax + by + c = 0$ com $c \neq 0$ (L não passa na origem). Pela estratégia dos dois exercícios anteriores, a imagem de L tem equação

$$\begin{aligned} (x, y) \in i(L) &\iff \frac{ax}{x^2+y^2} + \frac{by}{x^2+y^2} + c = 0 \\ &\iff \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + x^2 + y^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4c^2}, \end{aligned}$$

a qual é a equação de uma circunferência de centro $\left(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}$. Apesar de satisfazer a equação acima, a origem não faz parte da imagem de L , pois i não está aí definida.

□

- (6) (a) Mostre que a imagem por i de uma circunferência que não passa na origem é uma circunferência.
 (b) Mostre que a imagem por i de uma circunferência furada na origem é uma recta que não passa na origem.

Resolução: Uma circunferência C de centro (a, b) e raio r tem equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

onde $c = a^2 + b^2 - r^2$. Pelo raciocínio do exercício (3), a imagem por i de C , ou de C furada na origem se ela passar neste ponto, tem equação (para $(x, y) \neq (0, 0)$)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 - \frac{2ax}{x^2+y^2} - \frac{2by}{x^2+y^2} + c = 0 \\ \iff &\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2ax}{x^2+y^2} - \frac{2by}{x^2+y^2} + c = 0 \\ \iff &1 - 2ax - 2by + c(x^2 + y^2) = 0, \end{aligned}$$

o que é a equação de uma recta ou de uma circunferência, consoante é $c = 0$ (i.e., C passa na origem) ou $c \neq 0$ (i.e., C não passa na origem), respectivamente.

- (a) Se C não passa na origem, então $r^2 \neq a^2 + b^2$, i.e., $c \neq 0$, pelo que se pode dividir a equação geral acima por c obtendo

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 2\frac{a}{c}x - 2\frac{b}{c}y + \frac{1}{c} = 0 \\ \iff &\left(x - \frac{a}{c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{1}{c} \\ \iff &\left(x - \frac{a}{c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-(a^2+b^2-r^2)}{c^2} \\ \iff &\left(x - \frac{a}{c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{r^2}{c^2}, \end{aligned}$$

onde $c = a^2 + b^2 - r^2$. Trata-se da circunferência de centro $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ e raio $\frac{r}{|c|}$.

- (b) Se C passa na origem, então $r^2 = a^2 + b^2$, i.e., $c = 0$, pelo que a equação geral acima fica simplesmente

$$1 - 2ax - 2by = 0 \iff 2ax + 2by = 1,$$

a qual é a equação de uma recta que não passa na origem e que passa no ponto $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ se $a \neq 0$ e no ponto $\left(0, \frac{1}{2b}\right)$ se $b \neq 0$, sendo horizontal ou vertical se $a = 0$ ou $b = 0$, respectivamente.

□

- (7) Seja L uma recta que não passa na origem e seja $C = i(L) \cup \{(0, 0)\}$ a circunferência dada pela imagem de L fechada com a origem. Mostre que a tangente a C na origem é paralela a L .

Resolução: *Por rotação dos eixos coordenados, pode-se assumir que L é uma recta vertical $x = \text{constante}$. Como L é invariante por reflexão ortogonal relativamente ao eixo dos xx , a sua imagem por i também será invariante por esta reflexão; isto pode ser visto geometricamente da definição de i ou usando a expressão em coordenadas do Exercício (2). Portanto C será uma circunferência que passa na origem e simétrica por reflexão ortogonal relativamente ao eixo dos xx , ou seja, o eixo dos xx contém um diâmetro de C . A tangente a C na origem é ortogonal ao diâmetro nesse ponto, pelo que é vertical, tal como a recta inicial L . \square*

- (8) Mostre que i preserva ângulos.

Resolução: *Considera-se duas rectas L_1 e L_2 não paralelas cujas imagens são descritas no exercício (5).*

Caso em que L_1 e L_2 passam na origem:

Como $i(L_1) = L_1$ e $i(L_2) = L_2$, é claro que $\sphericalangle(i(L_1), i(L_2)) = \sphericalangle(L_1, L_2)$.

Caso em que L_1 não passa na origem e L_2 passa na origem:

A imagem de L_1 por i é uma circunferência C_1 furada na origem, cuja tangente T_1 na origem é paralela a L_1 pelo exercício (7). Como $i(L_2) = L_2$, como L_2 intersecta L_1 e T_1 formando o mesmo ângulo (já que L_1 e T_1 são paralelas), e como o ângulo de intersecção de L_2 com C_1 é o mesmo nos dois pontos de intersecção, conclui-se que $\sphericalangle(i(L_1), i(L_2)) = \sphericalangle(C_1, L_2) = \sphericalangle(T_1, L_2) = \sphericalangle(L_1, L_2)$.

Caso em que L_1 e L_2 passam na origem:

As imagens de L_1 e L_2 por i são circunferências C_1 e C_2 furadas na origem, cujas tangentes, T_1 e T_2 , na origem são paralelas a L_1 e L_2 , respectivamente. Então $\sphericalangle(L_1, L_2) = \sphericalangle(T_1, T_2)$. Na imagem por i do ponto de intersecção, as tangentes formam um ângulo igual ao ângulo entre T_1 e T_2 . Esse ângulo é o ângulo entre C_1 e C_2 , logo $\sphericalangle(L_1, L_2) = \sphericalangle(i(L_1), i(L_2))$.

\square

- (9) Seja D uma circunferência que intersecta ortogonalmente a circunferência unitária C centrada na origem. Mostre que a imagem por i da circunferência D é ela própria.

Resolução: *Sejam A e B os pontos de intersecção de D e C . Como pertencem a C , os pontos A e B são fixos por i . Pelos exercícios (6)(a) e (8), a imagem de D por i é uma circunferência D' que passa por A e por B ortogonalmente a C . As rectas tangentes a C em A e em B têm que conter os raios de D' nesses pontos. A intersecção dessas rectas tem que ser o centro O de D' e o centro de D . Como A e B estão em D e em D' , o raio destas circunferências é $|OA| = |OB|$. Tendo o mesmo centro e o mesmo raio, conclui-se que $D = D'$. \square*