Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 22/5/2002

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 5

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI`

A **inversão** do plano $\mathbb{R}^2$ relativamente a uma circunferência C de centro O e raio R é a aplicação

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \ , \qquad A \longmapsto A' \ ,$$

onde a imagem A' de A satisfaz $\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA|^2}\overrightarrow{OA}$. *Todos os exercícios desta ficha dizem respeito à inversão i relativamente à circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.*

Diz-se que uma recta ou circunferência é **furada** se se lhe removeu um ponto.

(1) Verifique que i é uma involução.

Resolução: *Para a inversão i relativamente à circunferência de centro O e raio R, seja A' a imagem do ponto A e A'' a imagem de A'. Há que mostrar que $A'' = A$, ou seja que $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA}$. Usando as relações entre A'', A' e A da definição de i, obtém-se*

$$\overrightarrow{OA''} = \frac{R^2}{|OA'|^2}\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA'|^2} \cdot \frac{R^2}{|OA|^2}\overrightarrow{OA} \ .$$

Como $|OA'| = \frac{R^2}{|OA|^2}|OA| = \frac{R^2}{|OA|}$, fica

$$\overrightarrow{OA''} = \frac{R^2}{\left(\frac{R^2}{|OA|}\right)^2} \cdot \frac{R^2}{|OA|^2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} \ .$$

□

(2) Exprima i em coordenadas cartesianas x, y.

Resolução: *Sendo (x,y) as coordenadas cartesianas do ponto A (isto é, $\overrightarrow{OA} = (x,y) - (0,0)$), as coordenadas cartesianas $(x',y') = i(x,y)$ do ponto imagem A' são dadas por*

$$(x',y') = \frac{1^2}{||(x,y)||^2}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \ .$$

□

(3) Calcule a imagem por i da:
 (a) recta $2x + 4y = 1$;
 (b) recta $y = x$ furada na origem.

Resolução: *Seja M um subconjunto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como i é uma involução, um ponto (x,y) pertence à imagem de M se e só se $i(x,y) \in M$.*

(a) *Seja M a recta de equação $2x+4y=1$. Pela observação acima, e para $(x,y)\neq(0,0)$, tem-se*

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in i(M) &\iff 2\cdot\tfrac{x}{x^2+y^2}+4\cdot\tfrac{y}{x^2+y^2}=1\\
&\iff 2x+4y=x^2+y^2\\
&\iff x^2-2x+1+y^2-4y+4=5\\
&\iff (x-1)^2+(y-2)^2=5\ ,
\end{aligned}
$$

logo a imagem desta recta é a circunferência de centro $(1,2)$ e raio $\sqrt{5}$.

(b) *Seja M a recta de equação $y=x$ furada na origem. Pela observação acima, e para $(x,y)\neq(0,0)$, tem-se*

$$(x,y)\in i(M)\iff \frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}\iff y=x\ ,$$

logo a imagem desta recta furada na origem é ela própria. Em alternativa, recordando as propriedades da inversão (que preserva direcções, que inverte as normas e que é uma involução), poder-se-ia chegar à mesma conclusão sem efectuar cálculos.

$\square$

(4) Calcule a imagem por i da:

(a) circunferência de centro $(2,0)$ e raio 1;

(b) circunferência de centro $(-2,0)$ e raio 2 furada na origem.

Resolução: *Segue-se a estratégia do exercício anterior.*

(a) *Seja M a circunferência de equação $(x-2)^2+y^2=1$. Tem-se para $(x,y)\neq(0,0)$*

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in i(M) &\iff \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}-2\right)^2+\left(\tfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2=1\\
&\iff \tfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+4-\tfrac{4x}{x^2+y^2}=1\\
&\iff 1+4(x^2+y^2)-4x=x^2+y^2\\
&\iff x^2+y^2-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{1}{3}=0\\
&\iff (x-\tfrac{2}{3})^2+y^2=\tfrac{1}{9}\ ,
\end{aligned}
$$

logo a imagem de M é a circunferência de centro $(\frac{2}{3},0)$ e raio $\frac{1}{3}$.

(b) *Seja M a circunferência de equação $(x+2)^2+y^2=4$ furada na origem. Tem-se para $(x,y)\neq(0,0)$*

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in i(M) &\iff \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}+2\right)^2+\left(\tfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2=4\\
&\iff \tfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+4+\tfrac{4x}{x^2+y^2}=4\\
&\iff 1+4x=0\ ,
\end{aligned}
$$

logo a imagem de M é a recta vertical $x=-\frac{1}{4}$.

$\square$

(5) (a) Mostre que a imagem por i de uma recta furada na origem é ela própria.

(b) Mostre que a imagem por i de uma recta que não passa na origem é uma circunferência furada na origem.

Resolução:

(a) *Seja L uma recta furada na origem. Por definição de i qualquer ponto de L no interior de C é imagem de um ponto de L fora de C e vice-versa. Os pontos de $C\cap L$ são fixos por i. Conclui-se que a imagem de L por i é ela própria. Equivalentemente poder-se-ia demonstrar a afirmação usando coordenadas cartesianas.*

(b) *Seja L uma recta de equação $ax+by+c=0$ com $c\neq 0$ (L não passa na origem). Pela estratégia dos dois exercícios anteriores, a imagem de L tem equação*

$$\begin{aligned}(x,y)\in i(L) &\iff \tfrac{ax}{x^2+y^2}+\tfrac{by}{x^2+y^2}+c=0\\ &\iff \tfrac{a}{c}x+\tfrac{b}{c}y+x^2+y^2=0\\ &\iff \left(x+\tfrac{a}{2c}\right)^2+\left(y+\tfrac{b}{2c}\right)^2=\tfrac{a^2+b^2}{4c^2}\ ,\end{aligned}$$

a qual é a equação de uma circunferência de centro $\left(-\frac{a}{2c},-\frac{b}{2c}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}$. Apesar de satisfazer a equação acima, a origem não faz parte da imagem de L, pois i não está aí definida.

$\square$

(6) (a) Mostre que a imagem por i de uma circunferência que não passa na origem é uma circunferência.

(b) Mostre que a imagem por i de uma circunferência furada na origem é uma recta que não passa na origem.

Resolução: *Uma circunferência C de centro (a,b) e raio r tem equação*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \iff x^2+y^2-2ax-2by+c=0\ ,$$

onde $c=a^2+b^2-r^2$. Pelo raciocínio do exercício (3), a imagem por i de C, ou de C furada na origem se ela passar neste ponto, tem equação (para $(x,y)\neq(0,0)$)

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\tfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2-\tfrac{2ax}{x^2+y^2}-\tfrac{2by}{x^2+y^2}+c=0\\ \iff\ &\tfrac{1}{x^2+y^2}-\tfrac{2ax}{x^2+y^2}-\tfrac{2by}{x^2+y^2}+c=0\\ \iff\ &1-2ax-2by+c(x^2+y^2)=0\ ,\end{aligned}$$

o que é a equação de uma recta ou de uma circunferência, consoante é $c=0$ (i.e., C passa na origem) ou $c\neq 0$ (i.e., C não passa na origem), respectivamente.

(a) *Se C não passa na origem, então $r^2\neq a^2+b^2$, i.e., $c\neq 0$, pelo que se pode dividir a equação geral acima por c obtendo*

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2\tfrac{a}{c}x-2\tfrac{b}{c}y+\tfrac{1}{c}=0\\ \iff\ &(x-\tfrac{a}{c})^2+(y-\tfrac{b}{c})^2=\tfrac{a^2}{c^2}+\tfrac{b^2}{c^2}-\tfrac{1}{c}\\ \iff\ &(x-\tfrac{a}{c})^2+(y-\tfrac{b}{c})^2=\tfrac{a^2+b^2-(a^2+b^2-r^2)}{c^2}\\ \iff\ &(x-\tfrac{a}{c})^2+(y-\tfrac{b}{c})^2=\tfrac{r^2}{c^2}\ ,\end{aligned}$$

onde $c=a^2+b^2-r^2$. Trata-se da circunferência de centro $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$ e raio $\frac{r}{|c|}$.

(b) *Se C passa na origem, então $r^2=a^2+b^2$, i.e., $c=0$, pelo que a equação geral acima fica simplesmente*

$$1-2ax-2by=0 \iff 2ax+2by=1\ ,$$

a qual é a equação de uma recta que não passa na origem e que passa no ponto $(\frac{1}{2a},0)$ se $a\neq 0$ e no ponto $(0,\frac{1}{2b})$ se $b\neq 0$, sendo horizontal ou vertical se $a=0$ ou $b=0$, respectivamente.

$\square$

(7) Seja L uma recta que não passa na origem e seja $C = i(L) \cup \{(0,0)\}$ a circunferência dada pela imagem de L fechada com a origem. Mostre que a tangente a C na origem é paralela a L.

Resolução: *Por rotação dos eixos coordenados, pode-se assumir que L é uma recta vertical $x =$constante. Como L é invariante por reflexão ortogonal relativamente ao eixo dos xx, a sua imagem por i também será invariante por esta reflexão; isto pode ser visto geometricamente da definição de i ou usando a expressão em coordenadas do Exercício (2). Portanto C será uma circunferência que passa na origem e simétrica por reflexão ortogonal relativamente ao eixo dos xx, ou seja, o eixo dos xx contém um diâmetro de C. A tangente a C na origem é ortogonal ao diâmetro nesse ponto, pelo que é vertical, tal como a recta inicial L.* □

(8) Mostre que i preserva ângulos.

Resolução: *Considera-se duas rectas L_1 e L_2 não paralelas cujas imagens são descritas no exercício (5).*
Caso em que L_1 e L_2 passam na origem:
Como $i(L_1) = L_1$ e $i(L_2) = L_2$, é claro que $\measuredangle(i(L_1), i(L_2)) = \measuredangle(L_1, L_2)$.
Caso em que L_1 não passa na origem e L_2 passa na origem:
A imagem de L_1 por i é uma circunferência C_1 furada na origem, cuja tangente T_1 na origem é paralela a L_1 pelo exercício (7). Como $i(L_2) = L_2$, como L_2 intersecta L_1 e T_1 formando o mesmo ângulo (já que L_1 e T_1 são paralelas), e como o ângulo de intersecção de L_2 com C_1 é o mesmo nos dois pontos de intersecção, conclui-se que $\measuredangle(i(L_1), i(L_2)) = \measuredangle(C_1, L_2) = \measuredangle(T_1, L_2) = \measuredangle(L_1, L_2)$.
Caso em que L_1 e L_2 passam na origem:
As imagens de L_1 e L_2 por i são circunferências C_1 e C_2 furadas na origem, cujas tangentes, T_1 e T_2, na origem são paralelas a L_1 e L_2, respectivamente. Então $\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(T_1, T_2)$. Na imagem por i do ponto de intersecção, as tangentes formam um ângulo igual ao ângulo entre T_1 e T_2. Esse ângulo é o ângulo entre C_1 e C_2, logo $\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(i(L_1), i(L_2))$.
□

(9) Seja D uma circunferência que intersecta ortogonalmente a circunferência unitária C centrada na origem. Mostre que a imagem por i da circunferência D é ela própria.

Resolução: *Sejam A e B os pontos de intersecção de D e C. Como pertencem a C, os pontos A e B são fixos por i. Pelos exercícios (6)(a) e (8), a imagem de D por i é uma circunferência D' que passa por A e por B ortogonalmente a C. As rectas tangentes a C em A e em B têm que conter os raios de D' nesses pontos. A intersecção dessas rectas tem que ser o centro O de D' e o centro de D. Como A e B estão em D e em D', o raio destas circunferências é $|OA| = |OB|$. Tendo o mesmo centro e o mesmo raio, conclui-se que $D = D'$.* □