Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 5/6/2002

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 6

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI`

Em primeira aproximação e para muitas superfícies, os raios de luz, as ondas sonoras, as ondas de rádio, o calor radiado, etc. satisfazem a seguinte lei de reflexão:
o ângulo que um raio incidente faz com o plano tangente à superfície é igual ao ângulo que o respectivo raio reflectido faz com esse plano tangente.

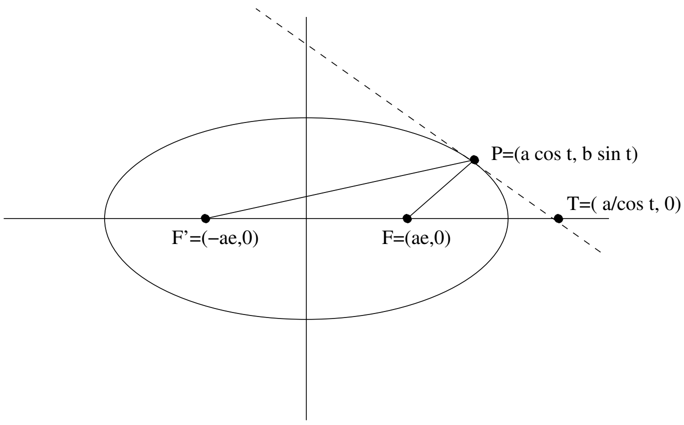
(1) Mostre que: *a luz proveniente de um foco de um* **espelho elíptico** *é reflectida na elipse com direcção ao segundo foco.*

Resolução: *A equação cartesiana da elipse em posição standard é* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Seja* $P = (a\cos t, b\sin t)$ *um ponto da elipse no primeiro quadrante. Para pontos dos outros quadrantes o tratamento é semelhante por simetria relativamente a reflexões ortogonais ao longo dos eixos coordenados. Os quatros pontos da elipse sobre os eixos coordenados têm tratamentos especiais bastante simples (porque as rectas tangentes são horizontais ou verticais) e não são cobertos nesta resolução abreviada.*

A tangente à elipse no ponto P *tem equação cartesiana*

$$\frac{x\cos t}{a} + \frac{y\sin t}{b} = 1$$

pelo que a sua intersecção com o eixo dos xx (de equação $y = 0$*) é o ponto* $T = (\frac{a}{\cos t}, 0)$.



As coordenadas do ponto T *permitem calcular*

$$\frac{|TF|}{|TF'|} = \frac{\frac{a}{\cos t} - ae}{\frac{a}{\cos t} + ae} = \frac{1 - e\cos t}{1 + e\cos t}\ .$$

Sendo as directrizes D *e* D' *correspondentes a* F *e* F' *definidas por* $x = \frac{a}{e}$ *e* $x = -\frac{a}{e}$, *calcula-se explicitamente as distâncias*

$$|PF| = e|PD| = e\left(\frac{a}{e} - a\cos t\right) = a - ae\cos t$$

e

$$|PF'| = e|PD'| = e\left(\frac{a}{e} + a\cos t\right) = a + ae\cos t\ ,$$

donde segue que $\frac{|PF|}{|PF'|} = \frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}$ *e consequentemente que* $\frac{|PF|}{|PF'|} = \frac{|TF|}{|TF'|}$.

A lei dos senos aplicada aos triângulos PFT *e* $PF'T$ *diz que*

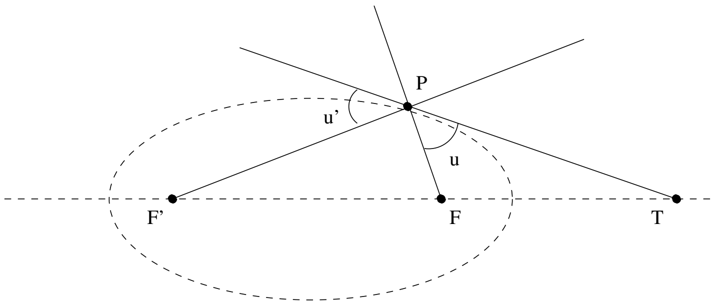
$$\frac{|PF|}{\sin\measuredangle PTF} = \frac{|TF|}{\sin\measuredangle TPF} = \frac{|TP|}{\sin\measuredangle TFP}$$

e que

$$\frac{|PF'|}{\sin\measuredangle PTF'} = \frac{|TF'|}{\sin\measuredangle TPF'} = \frac{|TP|}{\sin\measuredangle TF'P}\ .$$

Usando a igualdade acima para as razões dos lados, obtém-se que

$$\frac{\sin\measuredangle PTF}{\sin\measuredangle TPF} = \frac{|PF|}{|TF|} = \frac{|PF'|}{|TF'|} = \frac{\sin\measuredangle PTF'}{\sin\measuredangle TPF'}\ .$$



Como $\measuredangle PTF = \measuredangle PTF'$, *a relação anterior implica que* $\sin\measuredangle TPF = \sin\measuredangle TPF'$, *donde os ângulos* $u = \measuredangle TPF$ *e* $\measuredangle TPF'$ *ou são iguais ou são complementares. Estes ângulos só podem ser iguais no caso da circunferência onde* $F = F'$, *quando o raio* PF *é ortogonal à tangente em* P, *pelo que os dois ângulos em causa são rectos. Sendo os ângulos diferentes, então* $u + \measuredangle TPF' = \pi$. *Por outro lado,* $\measuredangle TPF' + u' = \pi$, *onde* u' *é o ângulo indicado na figura acima. Conclui-se que* $u = u'$ *como se queria demonstrar. A igualdade destes ângulos mostra que, para a lei geral de reflexão ser satisfeita, um raio proveniente de um foco é reflectido na elipse com direcção ao segundo foco.*

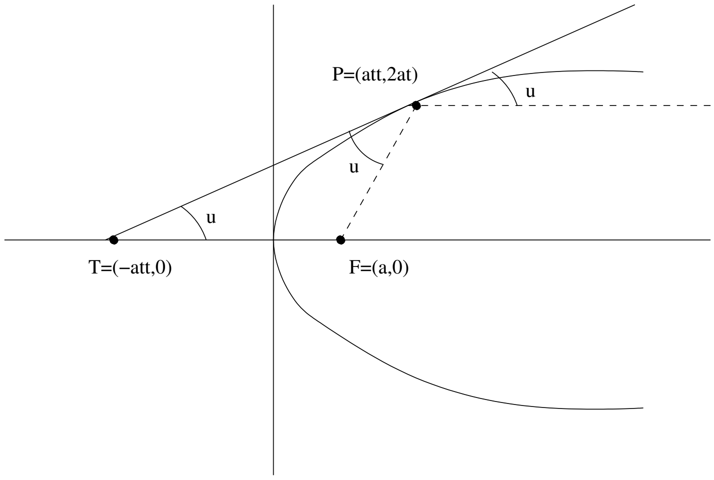
Situações sanálogas ocorrem para raios fora da elipse dirigidos a um foco: são reflectidos na elipse aparentando provir do outro foco. $\square$

(2) Mostre que: *os raios de luz paralelos ao eixo de um* **espelho parabólico** *são reflectidos na parábola com direcção ao foco; reciprocamente, os raios de luz provenientes do foco são reflectidos na parábola tornando-se num feixe de raios paralelos ao eixo.*

Resolução: *A equação da parábola em posição standard é* $y^2 = 4ax$. *Seja* $P = (at^2, 2at)$ *um ponto da parábola. A tangente à parábola no ponto* P *tem equação cartesiana*

$$2aty = 2a(x + at^2)$$

pelo que a sua intersecção com o eixo dos xx (de equação $y = 0$) é o ponto $T = (-at^2, 0)$.



Usando as coordenadas, calcula-se explicitamente as distâncias

$$|TF| = a + at^2 \qquad \text{e} \qquad |PF| = \sqrt{(at^2 - a)^2 + (2at)^2} = \sqrt{(at^2 + a)^2}$$

e conclui-se que são iguais. Sendo o triângulo PTF isósceles com $|TF| = |PF|$, obtém-se a igualdade dos ângulos $\measuredangle FTP$ e $\measuredangle FPT$.

Se u for o ângulo de incidência de um raio de luz paralelo ao eixo, então $u = \measuredangle FTP$ por se tratar de ângulos entre rectas paralelas. Para que u seja o ângulo de reflexão (de acordo com a lei geral de reflexão), o raio reflectido tem que se dirigir para F seguindo a aresta PF do triângulo PTF.

Se $u = \measuredangle FPT$ for o ângulo de incidência de um raio proveniente do foco, então $u = \measuredangle PTF$ porque o triângulo é isósceles, de maneira que o raio reflectido é horizontal para o ângulo de reflexão também ser u (assim obedecendo à lei geral de reflexão).

Situações semelhantes (simétricas) ocorrem se os raios estiverem fora da concavidade da parábola. □

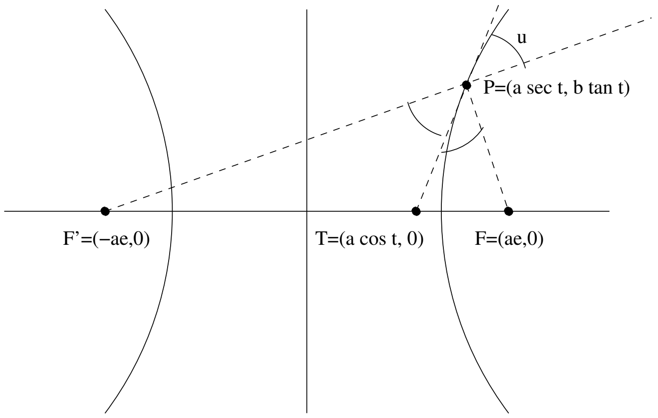
(3) Mostre que: *a luz proveniente de um foco de um* **espelho hiperbólico** *é reflectida na hipérbole de maneira a parecer que foi emitida do segundo foco; além disso, luz dirigida a um foco é reflectida no espelho hiperbólico com direcção ao segundo foco.*

Resolução: *A equação cartesiana da hipérbole em posição standard é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Seja $P = (a \sec t, b \tan t)$ um ponto da hipérbole no primeiro quadrante. Para pontos dos outros quadrantes o tratamento é semelhante por simetria relativamente a reflexões ortogonais ao longo dos eixos coordenados. Os dois pontos da hipérbole sobre o eixo dos xx têm tratamento especial bastante simples (nesse caso, a tangente é vertical e $P = T$) e não são cobertos nesta resolução abreviada.*

A tangente à hipérbole no ponto P tem equação cartesiana

$$\frac{x \sec t}{a} - \frac{y \tan t}{b} = 1$$

pelo que a sua intersecção com o eixo dos xx (de equação $y = 0$) é o ponto $T = (a\cos t, 0)$.



As coordenadas do ponto T e dos focos permitem calcular explicitamente:

$$\frac{|TF|}{|TF'|} = \frac{ae - a\cos t}{a\cos t + ae} = \frac{e - \cos t}{e + \cos t} \ .$$

Sendo as directrizes D e D' correspondentes a F e F' definidas por $x = \frac{a}{e}$ e $x = -\frac{a}{e}$, calcula-se explicitamente as distâncias

$$|PF| = e|PD| = e\left(a\sec t - \frac{a}{e}\right) = ea\sec t - a$$

e

$$|PF'| = e|PD'| = e\left(a\sec t + \frac{a}{e}\right) = ea\sec t + a \ ,$$

donde segue que $\frac{|PF|}{|PF'|} = \frac{e\sec t - 1}{e\sec t + 1} = \frac{e-\cos t}{e+\cos t}$ e consequentemente que $\frac{|PF|}{|PF'|} = \frac{|TF|}{|TF'|}$.

A lei dos senos aplicada aos triângulos PFT e $PF'T$ diz que

$$\frac{|PF|}{\sin\measuredangle PTF} = \frac{|TF|}{\sin\measuredangle TPF} = \frac{|TP|}{\sin\measuredangle TFP}$$

e que

$$\frac{|PF'|}{\sin\measuredangle PTF'} = \frac{|TF'|}{\sin\measuredangle TPF'} = \frac{|TP|}{\sin\measuredangle TF'P} \ .$$

Usando a igualdade acima para as razões dos lados, obtém-se que

$$\frac{\sin\measuredangle PTF}{\sin\measuredangle TPF} = \frac{|PF|}{|TF|} = \frac{|PF'|}{|TF'|} = \frac{\sin\measuredangle PTF'}{\sin\measuredangle TPF'} \ .$$

Como $\measuredangle PTF$ e $\measuredangle PTF'$ são ângulos complementares, os seus senos são iguais, pelo que a relação anterior implica que $\sin\measuredangle TPF = \sin\measuredangle TPF'$. Não podendo ser complementares, os ângulos $\measuredangle TPF$ e $\measuredangle TPF'$ têm que ser iguais. Ambos são então iguais ao ângulo u entre a tangente em P e a recta PF', indicado na figura. Daqui e da lei geral de reflexão seguem as propriedades enunciadas para os espelhos hiperbólicos. □