

GEOMETRIA I – LMAC  
EXERCÍCIOS DE REVISÃO

*os exercícios desta lista não pretendem ser os mais representativos da matéria,  
mas sim complementares aos exercícios apresentados durante o semestre*

**Geometria afim e geometria euclidiana**

- (1) Determine uma fórmula para uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno de um ponto arbitrário  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
- (2) Mostre que qualquer isometria  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma composição de até três reflexões ortogonais.
- (3) Escreva a rotação centrada na origem por ângulo  $\theta$  no sentido positivo como a composição de duas reflexões ortogonais.
- (4) Escreva uma translação  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como a composição de duas reflexões ortogonais.
- (5) Mostre que as isometrias do plano euclidiano podem ser escritas, em termos de números complexos, de acordo com a lista seguinte.

translações:	$z \mapsto z + b$
rotações:	$z \mapsto az + b$ com $ a  = 1$ , $a \neq 1$
reflexões:	$z \mapsto a\bar{z} + b$ com $ a  = 1$ , $a\bar{b} + b = 0$
reflexões deslizantes:	$z \mapsto a\bar{z} + b$ com $ a  = 1$ , $a\bar{b} + b \neq 0$

Qual é o aspecto de uma aplicação afim geral em termos de números complexos?

- (6) Enuncie e demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwartz, incluindo o caso da igualdade.
- (7) Mostre que o grupo  $O(2)$  é limitado e fechado no conjunto de todas as matrizes (pelo que é um subconjunto compacto, de acordo com o teorema de Heine-Borel).
- (8) Duas figuras  $F_1$  e  $F_2$  dizem-se congruentes (em geometria euclidiana) se existe uma isometria que leva  $F_1$  para  $F_2$ . Mostre que congruência é uma relação de equivalência.

**Triângulos e circunferências**

- (9) Mostre que as três alturas de um qualquer triângulo  $ABC$  intersectam-se num ponto.
- (10) Exprima, em função dos ângulos em  $B$  e em  $C$  de um triângulo  $ABC$ , o ângulo formado pela altura e pela bissetriz relativas ao vértice  $A$ .
- (11) Exprima os lados de um triângulo  $ABC$  em função da sua área e dos ângulos em  $A$  e em  $B$ .

**Geometria projectiva**

- (12) Mostre que existe exactamente um plano projectivo que contém três pontos projectivos não colineares.
- (13) Mostre que, dados três planos projectivos em  $\mathbb{RP}^3$ , ou se intersectam exactamente num ponto, ou têm uma recta projectiva em comum.
- (14) Determine o ponto de intersecção dos pares de rectas em  $\mathbb{RP}^2$  com as seguintes equações cartesianas:

- (a)  $x + 6y - 5z = 0$  e  $x - 2y + z = 0$ ;  
 (b)  $x - y - z = 0$  e  $x + 5y + 2z = 0$ ;  
 (c)  $x + 2y - z = 0$  e  $2x + y - 4z = 0$ .
- (15) Determine o ponto de  $\mathbb{R}P^2$  onde a recta através de  $[8, -1, 2]$  e  $[1, -2, -1]$  intersecta a recta que passa em  $[0, 1, -1]$  e  $[2, 3, 1]$ .

### Geometria esférica

- (16) Escreva a projecção estereográfica em coordenadas cartesianas.  
 (17) O que são as imagens dos meridianos e dos paralelos por projecção estereográfica a partir de um pólo?  
 (18) Mostre que a intersecção de uma esfera com um plano é uma circunferência nesse plano.  
 (19) Qual é a área de um triângulo com os três ângulos internos iguais a  $\frac{2\pi}{3}$  numa esfera de raio 2?

### Geometria hiperbólica e inversões

- (20) Esboce os seguintes conjuntos e decida quais são d-rectas:  
 (a)  $\{(x, y) \mid y = 3x\} \cap \mathcal{D}$ ;  
 (b)  $\{(x, y) \mid 3x + y = 1\} \cap \mathcal{D}$ ;  
 (c)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$ .  
 onde  $\mathcal{D}$  é o disco de Poincaré.
- (21) Quais das seguintes d-rectas é que se intersectam? são paralelas? são ultra-paralelas?  
 (a)  $\{(x, y) \mid y = x\} \cap \mathcal{D}$ ;  
 (b)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$ ;  
 (c)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$ ;  
 (d)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$ .  
 onde  $\mathcal{D}$  é o disco de Poincaré.
- (22) Considere a família de todas as circunferências furadas na origem e tangentes a uma recta  $L$  na origem. Descreva a família das imagens destas circunferências por inversão relativamente à circunferência de raio 1 e centro na origem.

### Curvas

- (23) Mostre que a intersecção de um cone com um plano é uma curva com equação cartesiana quadrática.  
 (24) Mostre que a curva em  $\mathbb{R}^3$  determinada pelas equações

$$\begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

é uma circunferência.

- (25) Mostre que uma cónica e uma recta intersectam-se em 0, 1 ou 2 pontos.  
 (26) Classifique as seguintes cónicas e determine o centro/vértice e o eixo de cada uma.  
 (a)  $x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 2 = 0$ ;  
 (b)  $x^2 + 3xy + 4y^2 - 7 = 0$ ;  
 (c)  $x^2 + xy + 4y^2 + 3x - 9 = 0$ ;  
 (d)  $x^2 + 2xy + y^2 - 7x + 3 = 0$ ;  
 (e)  $2x^2 - xy - 2y^2 - 2 = 0$ .

- (27) Descreva explicitamente cada uma das mudanças de coordenadas que permitem escrever as seguintes cónicas em termos de equações standard:
- $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0$ ;
  - $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$ ;
  - $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$ .

### Superfícies

- (28) Escreva uma parametrização da superfície com equação cartesiana  $(x^2 + y^2)^3 - z = 0$  e determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto  $(1, 1, 8)$ .
- (29) Determine os pontos regulares e escreva uma equação cartesiana do plano tangente em cada ponto regular da superfície com descrição paramétrica

$$\begin{cases} x = u + \frac{1}{v} \\ y = v + \frac{1}{u} \\ z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u} \end{cases} \quad (u, v) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 .$$

- (30) Seja  $S$  a superfície com descrição paramétrica

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{v}{u^2+v^2} \\ z = \frac{1}{u^2+v^2} \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} .$$

Determine o conjunto dos pontos de  $S$  onde o plano tangente é paralelo ao vector  $(1, 1, 1)$ .

- (31) Para cada uma das quádricas seguintes, determine o seu tipo e descreva a mudança de coordenadas que a leva para posição standard:
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$ ;
  - $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$ ;
  - $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$ ;
  - $x^2 - 4x - 3y + 4z - 2 = 0$ .

### Geometria do espaço-tempo

- (32) Demonstre a fórmula de adição de velocidades num espaço-tempo de Minkowski.
- (33) Um comboio desloca-se a 60 Km/h enquanto que uma criança corre para a frente no comboio a 10 Km/h relativamente ao comboio. Qual a velocidade da criança relativamente ao solo com três casas decimais? Qual seria a velocidade da criança relativamente ao solo se o comboio fosse a  $\frac{1}{2}c$  e a criança corresse para a frente a  $\frac{9}{10}c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz?
- (34) (a) Mostre que se  $\mathbf{v}$  é um vector de tipo tempo num espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^2$  com coordenada temporal positiva (i.e., futuro) num dado referencial inercial, então a coordenada temporal de  $\mathbf{v}$  é positiva em qualquer referencial inercial. Enuncie e demonstre uma propriedade análoga para vectores de tipo tempo com coordenada temporal negativa (i.e., passado). Conclua que se  $E$  e  $E'$  são eventos tais que  $\overrightarrow{EE'}$  é de tipo tempo e futuro, então qualquer observador inercial observa  $E$  a acontecer antes de  $E'$ .
- (b) Mostre que se  $\overrightarrow{EE'}$  é de tipo espaço, então alguns observadores observam  $E$  antes de  $E'$ , outros observam  $E$  e  $E'$  como sendo simultâneos e outros ainda observam  $E'$  a acontecer antes de  $E$ .