Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 11/6/2002

GEOMETRIA I – LMAC

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

os exercícios desta lista não pretendem ser os mais representativos da matéria, mas sim complementares aos exercícios apresentados durante o semestre

Geometria afim e geometria euclidiana

(1) Determine uma fórmula para uma rotação de ângulo θ em torno de um ponto arbitrário $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Mostre que qualquer isometria $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma composição de até três reflexões ortogonais.

(3) Escreva a rotação centrada na origem por ângulo θ no sentido positivo como a composição de duas reflexões ortogonais.

(4) Escreva uma translação $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como a composição de duas reflexões ortogonais.

(5) Mostre que as isometrias do plano euclidiano podem ser escritas, em termos de números complexos, de acordo com a lista seguinte.

translações:	$z \mapsto z + b$
rotações:	$z \mapsto az + b$ com $\lvert a\rvert = 1\ ,\ a \neq 1$
reflexões:	$z \mapsto a\overline{z} + b$ com $\lvert a\rvert = 1\ ,\ a\overline{b} + b = 0$
reflexões deslizantes:	$z \mapsto a\overline{z} + b$ com $\lvert a\rvert = 1\ ,\ a\overline{b} + b \neq 0$

Qual é o aspecto de uma aplicação afim geral em termos de números complexos?

(6) Enuncie e demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwartz, incluindo o caso da igualdade.

(7) Mostre que o grupo $\mathrm{O}(2)$ é limitado e fechado no conjunto de todas as matrizes (pelo que é um subconjunto compacto, de acordo com o teorema de Heine-Borel).

(8) Duas figuras F_1 e F_2 dizem-se congruentes (em geometria euclidiana) se existe uma isometria que leva F_1 para F_2. Mostre que congruência é uma relação de equivalência.

Triângulos e circunferências

(9) Mostre que as três alturas de um qualquer triângulo ABC intersectam-se num ponto.

(10) Exprima, em função dos ângulos em B e em C de um triângulo ABC, o ângulo formado pela altura e pela bissectriz relativas ao vértice A.

(11) Exprima os lados de um triângulo ABC em função da sua área e dos ângulos em A e em B.

Geometria projectiva

(12) Mostre que existe exactamente um plano projectivo que contém três pontos projectivos não colineares.

(13) Mostre que, dados três planos projectivos em $\mathbb{RP}^3$, ou se intersectam exactamente num ponto, ou têm uma recta projectiva em comum.

(14) Determine o ponto de intersecção dos pares de rectas em $\mathbb{RP}^2$ com as seguintes equações cartesianas:

(a) $x + 6y - 5z = 0$ e $x - 2y + z = 0$;
(b) $x - y - z = 0$ e $x + 5y + 2z = 0$;
(c) $x + 2y - z = 0$ e $2x + y - 4z = 0$.

(15) Determine o ponto de $\mathbb{RP}^2$ onde a recta através de $[8, -1, 2]$ e $[1, -2, -1]$ intersecta a recta que passa em $[0, 1, -1]$ e $[2, 3, 1]$.

Geometria esférica

(16) Escreva a projecção estereográfica em coordenadas cartesianas.

(17) O que são as imagens dos meridianos e dos paralelos por projecção estereográfica a partir de um pólo?

(18) Mostre que a intersecção de uma esfera com um plano é uma circunferência nesse plano.

(19) Qual é a área de um triângulo com os três ângulos internos iguais a $\frac{2\pi}{3}$ numa esfera de raio 2?

Geometria hiperbólica e inversões

(20) Esboce os seguintes conjuntos e decida quais são d-rectas:
(a) $\{(x, y) \mid y = 3x\} \cap \mathcal{D}$;
(b) $\{(x, y) \mid 3x + y = 1\} \cap \mathcal{D}$;
(c) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$.
onde $\mathcal{D}$ é o disco de Poincaré.

(21) Quais das seguintes d-rectas é que se intersectam? são paralelas? são ultra-paralelas?
(a) $\{(x, y) \mid y = x\} \cap \mathcal{D}$;
(b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$;
(c) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$;
(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$.
onde $\mathcal{D}$ é o disco de Poincaré.

(22) Considere a família de todas as circunferências furadas na origem e tangentes a uma recta L na origem. Descreva a família das imagens destas circunferências por inversão relativamente à circunferência de raio 1 e centro na origem.

Curvas

(23) Mostre que a intersecção de um cone com um plano é uma curva com equação cartesiana quadrática.

(24) Mostre que a curva em $\mathbb{R}^3$ determinada pelas equações

$$\begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

é uma circunferência.

(25) Mostre que uma cónica e uma recta intersectam-se em 0, 1 ou 2 pontos.

(26) Classifique as seguintes cónicas e determine o centro/vértice e o eixo de cada uma.
(a) $x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 2 = 0$;
(b) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 7 = 0$;
(c) $x^2 + xy + 4y^2 + 3x - 9 = 0$;
(d) $x^2 + 2xy + y^2 - 7x + 3 = 0$;
(e) $2x^2 - xy - 2y^2 - 2 = 0$.

(27) Descreva explicitamente cada uma das mudanças de coordenadas que permitem escrever as seguintes cónicas em termos de equações standard:
(a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0$;
(b) $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$;
(c) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$.

Superfícies

(28) Escreva uma parametrização da superfície com equação cartesiana $(x^2 + y^2)^3 - z = 0$ e determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto $(1, 1, 8)$.

(29) Determine os pontos regulares e escreva uma equação cartesiana do plano tangente em cada ponto regular da superfície com descrição paramétrica

$$\begin{cases} x &= u + \frac{1}{u} \\ y &= v + \frac{1}{v} \\ z &= \frac{u}{v} + \frac{v}{u} \end{cases} \qquad (u, v) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \ .$$

(30) Seja S a superfície com descrição paramétrica

$$\begin{cases} x &= \frac{u}{u^2+v^2} \\ y &= \frac{v}{u^2+v^2} \\ z &= \frac{1}{u^2+v^2} \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ .$$

Determine o conjunto dos pontos de S onde o plano tangente é paralelo ao vector $(1, 1, 1)$.

(31) Para cada uma das quádricas seguintes, determine o seu tipo e descreva a mudança de coordenadas que a leva para posição standard:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$;
(b) $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$;
(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$;
(d) $x^2 - 4x - 3y + 4z - 2 = 0$.

Geometria do espaço-tempo

(32) Demonstre a fórmula de adição de velocidades num espaço-tempo de Minkowski.

(33) Um comboio desloca-se a 60 Km/h enquanto que uma criança corre para a frente no comboio a 10 Km/h relativamente ao comboio. Qual a velocidade da criança relativamente ao solo com três casas decimais? Qual seria a velocidade da criança relativamente ao solo se o comboio fosse a $\frac{1}{2}c$ e a criança corresse para a frente a $\frac{9}{10}c$, onde c é a velocidade da luz?

(34) (a) Mostre que se $\mathbf{v}$ é um vector de tipo tempo num espaço de Minkowski $\mathbb{R}^2$ com coordenada temporal positiva (i.e., futuro) num dado referencial inercial, então a coordenada temporal de $\mathbf{v}$ é positiva em qualquer referencial inercial. Enuncie e demonstre uma propriedade análoga para vectores de tipo tempo com coordenada temporal negativa (i.e., passado). Conclua que se E e E' são eventos tais que $\overrightarrow{EE'}$ é de tipo tempo e futuro, então qualquer observador inercial observa E a acontecer antes de E'.
(b) Mostre que se $\overrightarrow{EE'}$ é de tipo espaço, então alguns observadores observam E antes de E', outros observam E e E' como sendo simultâneos e outros ainda observam E' a acontecer antes de E.