Geometrias Elementares
(Notas para Geometria I)

Ana Cannas da Silva[1]
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Lisboa, Março-Junho 2002

[1]E-mail: acannas@math.ist.utl.pt

Prólogo

Este texto (em construção!) visa servir de referência de apoio às aulas da disciplina Geometria I. Estará afixado em ficheiros PostScript e PDF na página http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI. É provável que, à medida que o semestre avança, estas notas se vão tornando bastante mais esquemáticas ou se vão até extinguindo...

Confessa-se já a flagrante ausência de ilustrações nesta primeira edição (Primavera 2002). Para atenuar esta falta, recomenda-se aos leitores compor esboços relevantes nas margens do texto. Esse exercício é prática corrente de geómetras, visando facilitar a compreensão e as consultas posteriores.

Críticas ou sugestões são bem-vindas. Em particular, agradece-se a indicação de gralhas ou comentários no sentido de melhorar a exposição. Os principais defeitos apontados serão coleccionados numa errata cuja versão mais recente vai sendo afixada na página www acima.

Em Junho de 2002 será disponibilizado o texto integral, revisto e acrescido de índices. A qualidade dessa revisão depende também da boa colaboração de todos os leitores. Obrigada, antecipadamente, pela vossa ajuda!

Ana Cannas da Silva

Instituto Superior Técnico,
Lisboa, Março de 2002

Introdução

A Geometria[1] é o estudo da forma.

Na perspectiva do matemático Klein, cada Geometria é o estudo dum grupo de transformações que actuam num espaço (fim do século XIX). As propriedades do espaço que são preservadas por todas as transformações do grupo são as *propriedades dessa Geometria*. Deste ponto de vista:

- a Geometria Euclidiana corresponde aos movimentos rígidos (transformações que preservam ângulos e distâncias);
- a Geometria Afim corresponde a movimentos gerados por translações e transformações lineares invertíveis;
- a Geometria Projectiva corresponde a transformações projectivas (classes de transformações lineares invertíveis, a menos de mudanças globais de escala); etc.

Esta abordagem contrasta com a de Hilbert (também em fins do século XIX) segundo o qual uma Geometria é uma colecção de teoremas que seguem de um sistema axiomático. Ambas as perspectivas libertam o geómetra da dependência do espaço físico. A de Hilbert corre maior risco de abstracção exagerada onde o significado natural fica perdido. A de Klein tem influenciado mais o desenvolvimento das geometrias desde meados do século XX e ser-lhe-á dado maior destaque nestas notas.

O primeiro tópico abordado é naturalmente a Geometria Euclidiana, que domina o pensamento geométrico desde o tempo de Euclides (cerca de 300 a.C.). Apesar da Geometria Euclidiana ser ainda crucial em engenharia e ciências, hoje-em-dia as geometrias não euclidianas são cada vez mais relevantes fisicamente. Por exemplo, a Geometria Esférica é a geometria natural para navegar ou estudar a superfície da Terra, e a Geometria Projectiva tem aplicações importantes em teoria de códigos (detecção e correcção de erros) e criptografia (codificação e autenticação). Acima de tudo, estas geometrias são monumentos intelectuais fundamentais para aprofundar mais tarde outros ramos da Matemática (tais como Topologia, Geometria Algébrica, Geometria Riemanniana, Geometria Simpléctica e Grupos de Lie) e é por isso que são aqui tratadas: como formas de pensamento necessárias a uma boa educação mental.

Este texto dirige-se a estudantes universitários que abordam a Geometria pela primeira vez de uma forma sistemática, após algum contacto experimental no Ensino Secundário.

[1] Do Grego, *Geometria* à letra significa medida (*metron*) da Terra (*ge*) Este nome foi originado em antiquíssimas aplicações geométricas no Egipto e Mesopotâmia para medição de áreas de terrenos. O papiro de Rhind (também conhecido por papiro de Ahmes), datado de cerca de 1650 a.C., é um documento egípcio contendo tabelas e problemas geométricos. Barros gravados da Babilónia demonstram conhecimentos de triângulos rectângulos e tripletos pitagóricos entre 1900 e 1600 a.C.; atribui-se a este povo a divisão da circunferência em 360 partes. Cerca de 230 a.C., Eratóstenes fez uma medição notavelmente precisa do raio da Terra.

A versão incial deste texto foi escrita para apoio da disciplina de Geometria I do primeiro ano da Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação do Instituto Superior Técnico. Esta disciplina tem por objectivo introduzir a Geometria Euclidiana e Geometrias Não-Euclidianas como modelos geométricos básicos que interagem com outras áreas e como fundamentos geométricos para posterior desenvolvimento. Esta disciplina foi criada por Paulo Almeida há cerca de uma dúzia de anos, como a primeira parte de uma trilogia de formação básica em Geometria na licenciatura.

Serviram de modelo para este texto excelentes livros modernos usados no ensino universitário em França, na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos da América. Destaca-se o recente livro por Michèle Audin [2] o qual, como tem sido habitual em exposições por esta autora, prima pela clareza e riqueza do conteúdo – é um prazer agradecer-lhe a inspiração!

Convenções

Alguns dos exercícios dispersos pelo texto contêm resultados auxiliares, onde se omitem as palavras "mostre que" quando se espera que seja claro que o que há a fazer é mesmo a verificação. Noções conhecidas do ensino secundário podem surgir envolvidas em exercícios mesmo antes de serem introduzidas no texto.

Normalmente, pontos são representados por letras maiúsculas, matrizes por letras maiúsculas a grosso, vectores por letras minúsculas a grosso, espaços vectoriais e afins por letras maiúsculas em tipo caligráfico, e aplicações por letras (romanas ou gregas) minúsculas. A não ser que haja indicação em contrário, todos os espaços vectoriais são reais.

Capítulo 1

Geometria Afim

A Geometria Afim no plano estuda as relações entre pontos e rectas definidos num conjunto. *Ponto* e *recta* são os objectos básicos onde assenta o sistema axiomático de Euclides para a Geometria Afim no plano, na sua formulação moderna (em finais do século XIX) por David Hilbert. Existe um sistema axiomático análogo para Geometria Afim no espaço.

Neste texto opta-se por introduzir a Geometria Afim com um sistema baseado no conceito de *vector*. Tirando partido dos conhecimentos de Álgebra Linear, esta substituição permite desenvolver a teoria mais simples e rapidamente. Esta substituição reflecte o papel central do conceito de vector em Matemática moderna. Recorde-se que vectores são uma abstracção matemática para quantidades caracterizadas pela sua magnitude e pela sua direcção, tais como forças e velocidades.

1.1 Espaços Afins

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial real.[1]

Definição 1.1 *Um* **espaço afim** *sobre $\mathcal{V}$ é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma aplicação*[2] *α que associa a cada par de pontos de $\mathcal{A}$ um vector de $\mathcal{V}$,*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB}\ , \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

[1]O conceito de espaço vectorial real é revisto no Apêndice 1.11. Todos os resultados e noções deste capítulo podem ser generalizados ao caso de espaços vectoriais complexos ou espaços vectoriais sobre outros *corpos de característica nula*, definidos na disciplina de Álgebra Geral.

[2]Uma **aplicação** é simplesmente uma função; é costume guardar o nome *função* para as funções com valores reais ou complexos tratadas em Análise (estudo de derivadas, integrais, etc.) e usa-se o termo *aplicação* quando se pretende reforçar que se trata de uma correspondência entre conjuntos com um carácter mais geométrico (usada para extrair relações entre pontos).

- *para todo o ponto $A \in \mathcal{A}$, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \alpha_A : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & B & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

  é uma bijecção, e

- *para todo o terno de pontos $A,B,C \in \mathcal{A}$ é satisfeita a seguinte relação, denominada* **relação triangular***:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\ .$$

A relação triangular tem por consequência que:

- $\overrightarrow{AA} = 0$ e
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Dois pontos de um espaço afim determinam um vector por intermédio da aplicação α. Informalmente, pode-se dizer que um espaço afim *é como* um espaço vectorial, *excepto que* não tem uma origem (vector nulo) destacada. Escolhido um ponto arbitrário A de um espaço afim $\mathcal{A}$, pode-se visualizar todos os pontos de $\mathcal{A}$ como vectores formando um espaço vectorial, onde todas as propriedades são obtidas por transferência pela aplicação α_A. Isto é explicado no último parágrafo desta secção.

Chama-se **dimensão** do espaço afim $\mathcal{A}$ à dimensão do espaço vectorial subjacente $\mathcal{V}$. O conjunto vazio é, como habitual, um exemplo patológico: trata-se de um espaço afim sobre qualquer espaço vectorial, pelo que se convenciona que não tem dimensão. Daqui em diante, assume-se que todos os espaços afins com que se trabalha não são vazios.

Notação. Denota-se um espaço afim apenas pela letra que representa o seu conjunto de pontos ($\mathcal{A}$ na definição anterior), admitindo que o espaço vectorial subjacente $\mathcal{V}$ e a aplicação α ficam claros do contexto ou das explicações. $\diamondsuit$

Exemplos.

1. Qualquer espaço vectorial $\mathcal{V}$ tem uma estrutura natural[3] de espaço afim: a aplicação α é dada pela diferença de vectores

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathcal{V}\times\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \longmapsto & \mathbf{v}-\mathbf{u}\ . \end{array}$$

   Em particular, todos os $\mathbb{R}^n$ são espaços afins.

[3]Esta estrutura diz-se *natural* porque não envolve escolhas; trata-se apenas de aproveitar *naturalmente* a própria estrutura de espaço vectorial. Daqui em diante, sempre que se referir à estrutura de espaço afim num espaço vectorial dado, tem-se em mente esta estrutura natural.

2. Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são espaços afins sobre os espaços vectoriais $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ respectivamente, então o seu produto cartesiano $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é naturalmente um espaço afim sobre o espaço vectorial produto $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. A aplicação α correspondente a $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é dada pelo *produto* das aplicações α_1 e α_2 de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$:
$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \times (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) & \longrightarrow & \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \\ & ((A_1, A_2), (B_1, B_2)) & \longmapsto & (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) \ . \end{array}$$

$\diamondsuit$

Da relação triangular segue a **regra do paralelogramo** que afirma a equivalência das igualdades
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \ .$$
De facto, esta equivalência resulta das igualdades
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} \ ,$$
tomando a sua diferença
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} \ .$$
Quando uma das duas igualdades equivalentes se verifica, diz-se que $AA'BB'$ é um **paralelogramo**.

Exercício 1. As diagonais de um paralelogramo intersectam-se no seu ponto médio, ou seja, se $AA'BB'$ é um paralelogramo e $C \in \mathcal{A}$ satisfaz $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AC}$, então C também satisfaz $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'C}$. $\triangle$

Notação. Se A é um ponto do espaço afim $\mathcal{A}$ e se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ é um vector do espaço vectorial subjacente, o único ponto $B \in \mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ é, por vezes, representado por $B = A + \mathbf{v}$. Graças à relação triangular, esta notação é coerente pois tem-se a associatividade
$$(A + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = A + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \ .$$

$\diamondsuit$

Fixado um ponto A de um espaço afim $\mathcal{A}$, define-se uma estrutura de espaço vectorial pela bijecção
$$\begin{array}{rccc} \alpha_A : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & B & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \ . \end{array}$$
Esta aplicação permite transportar a estrutura de espaço vectorial de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{A}$, ou seja, diz-se que $B + C = D$ se se verificar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Para realçar que esta estrutura depende fortemente da escolha do ponto A, representa-se o espaço vectorial por $\mathcal{V}_A$. Note-se que o papel de origem de $\mathcal{A}$ passa a ser desempenhado pelo ponto A pois $\overrightarrow{AA} = 0$. Enquanto que um espaço vectorial possui uma estrutura natural de espaço afim, um espaço afim *não* possui uma estrutura *natural* de espaço vectorial.

1.2 Subespaços Afins

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre um espaço vectorial $\mathcal{V}$.

Definição 1.2 *Um subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é um* **subespaço afim** *se contém um ponto A tal que a imagem de $\mathcal{B}$ pela bijecção α_A é um subespaço vectorial de $\mathcal{V}$.*

Exercício 2. Seja $\mathcal{B}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$.

(a) Existe um subespaço vectorial $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que *para qualquer ponto $B \in \mathcal{B}$* tem-se $\alpha_B(\mathcal{B}) = \mathcal{W}$.

Sugestão: Se $A, B \in \mathcal{B}$, então $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}$.

(b) O subespaço afim $\mathcal{B}$ *é um espaço afim* sobre $\mathcal{W}$. Diz-se então que $\mathcal{B}$ é um **subespaço afim sobre** $\mathcal{W}$.

$\triangle$

Reciprocamente, tem-se que:

Proposição 1.3 *Se $\mathcal{W}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{V}$ e $A \in \mathcal{A}$, então existe um e um só subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo A.*

Demonstração. Se $\mathcal{B}$ é um subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo A, então tem que ser $\alpha_A(\mathcal{B}) = \mathcal{W}$ e $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}\}$, donde se conclui a unicidade.

Por outro lado, o conjunto $\{B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}\}$ define bem um subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo A, donde se mostra a existência. $\square$

Definição 1.4 *Se $\mathcal{B}$ é um subespaço afim sobre o subespaço vectorial $\mathcal{W}$, diz-se que $\mathcal{B}$ tem a* **direcção** *$\mathcal{W}$.*

Qualquer subespaço afim é naturalmente um espaço afim. A dimensão de um subespaço afim é a dimensão do subespaço vectorial subjacente.

Exemplos.

1. Um espaço afim de dimensão zero é constituído por um só ponto, pelo que qualquer subconjunto constituído por um único ponto de $\mathcal{A}$ é um subespaço afim.

2. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais, e seja $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Para todo o vector $\mathbf{w}$ na imagem de f, a sua imagem inversa,[4] $f^{-1}(\mathbf{w})$, é um subespaço afim de $\mathcal{V}$ (onde se considera em $\mathcal{V}$ a sua estrutura natural de espaço afim) com direcção dada pelo núcleo de f.

   Exercício 3. Verificar esta asserção.

[4] A **imagem inversa** de um ponto $\mathbf{w}$ por uma aplicação f é o conjunto de todos os pontos no domínio de f cuja imagem por f é $\mathbf{w}$. A imagem inversa de $\mathbf{w}$ por f é por vezes também designada a *fibra* da aplicação f em $\mathbf{w}$.