Geometrias Elementares
(Notas para Geometria I)

Ana Cannas da Silva[1]
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Lisboa, Março-Junho 2002

[1]E-mail: acannas@math.ist.utl.pt

Prólogo

Este texto (em construção!) visa servir de referência de apoio às aulas da disciplina Geometria I. Estará afixado em ficheiros PostScript e PDF na página `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI`. É provável que, à medida que o semestre avança, estas notas se vão tornando bastante mais esquemáticas ou se vão até extinguindo...

Confessa-se já a flagrante ausência de ilustrações nesta primeira edição (Primavera 2002). Para atenuar esta falta, recomenda-se aos leitores compor esboços relevantes nas margens do texto. Esse exercício é prática corrente de geómetras, visando facilitar a compreensão e as consultas posteriores.

Críticas ou sugestões são bem-vindas. Em particular, agradece-se a indicação de gralhas ou comentários no sentido de melhorar a exposição. Os principais defeitos apontados serão coleccionados numa errata cuja versão mais recente vai sendo afixada na página `www` acima.

Em Junho de 2002 será disponibilizado o texto integral, revisto e acrescido de índices. A qualidade dessa revisão depende também da boa colaboração de todos os leitores. Obrigada, antecipadamente, pela vossa ajuda!

Ana Cannas da Silva

Instituto Superior Técnico,
Lisboa, Março de 2002

Índice

Introdução

A Geometria[1] é o estudo da forma.

Na perspectiva do matemático Klein, cada Geometria é o estudo dum grupo de transformações que actuam num espaço (fim do século XIX). As propriedades do espaço que são preservadas por todas as transformações do grupo são as *propriedades dessa Geometria*. Deste ponto de vista:

- a Geometria Euclidiana corresponde aos movimentos rígidos (transformações que preservam ângulos e distâncias);
- a Geometria Afim corresponde a movimentos gerados por translações e transformações lineares invertíveis;
- a Geometria Projectiva corresponde a transformações projectivas (classes de transformações lineares invertíveis, a menos de mudanças globais de escala); etc.

Esta abordagem contrasta com a de Hilbert (também em fins do século XIX) segundo o qual uma Geometria é uma colecção de teoremas que seguem de um sistema axiomático. Ambas as perspectivas libertam o geómetra da dependência do espaço físico. A de Hilbert corre maior risco de abstracção exagerada onde o significado natural fica perdido. A de Klein tem influenciado mais o desenvolvimento das geometrias desde meados do século XX e ser-lhe-á dado maior destaque nestas notas.

O primeiro tópico abordado é naturalmente a Geometria Euclidiana, que domina o pensamento geométrico desde o tempo de Euclides (cerca de 300 a.C.). Apesar da Geometria Euclidiana ser ainda crucial em engenharia e ciências, hoje-em-dia as geometrias não euclidianas são cada vez mais relevantes fisicamente. Por exemplo, a Geometria Esférica é a geometria natural para navegar ou estudar a superfície da Terra, e a Geometria Projectiva tem aplicações importantes em teoria de códigos (detecção e correcção de erros) e criptografia (codificação e autenticação). Acima de tudo, estas geometrias são monumentos intelectuais fundamentais para aprofundar mais tarde outros ramos da Matemática (tais como Topologia, Geometria Algébrica, Geometria Riemanniana, Geometria Simpléctica e Grupos de Lie) e é por isso que são aqui tratadas: como formas de pensamento necessárias a uma boa educação mental.

Este texto dirige-se a estudantes universitários que abordam a Geometria pela primeira vez de uma forma sistemática, após algum contacto experimental no Ensino Secundário.

A versão incial deste texto foi escrita para apoio da disciplina de Geometria I do primeiro ano da Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação do Instituto Superior Técnico. Esta disciplina tem por objectivo introduzir a Geometria Euclidiana e Geometrias Não-Euclidianas como modelos geométricos básicos que interagem com outras áreas e como fundamentos geométricos para

[1]Do Grego, *Geometria* à letra significa medida (*metron*) da Terra (*ge*). Este nome foi originado em antiquíssimas aplicações geométricas no Egipto e Mesopotâmia para medição de áreas de terrenos. O papiro de Rhind (também conhecido por papiro de Ahmes), datado de cerca de 1650 a.C., é um documento egípcio contendo tabelas e problemas geométricos. Barros gravados da Babilónia demonstram conhecimentos de triângulos rectângulos e tripletos pitagóricos entre 1900 e 1600 a.C.; atribui-se a este povo a divisão da circunferência em 360 partes. Cerca de 230 a.C., Eratóstenes fez uma medição notavelmente precisa do raio da Terra.

posterior desenvolvimento. Esta disciplina foi criada por Paulo Almeida há cerca de uma dúzia de anos, como a primeira parte de uma trilogia de formação básica em Geometria na licenciatura.

Serviram de modelo para este texto excelentes livros modernos usados no ensino universitário em França, na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos da América. Destaca-se o recente livro por Michèle Audin [2] o qual, como tem sido habitual em exposições por esta autora, prima pela clareza e riqueza do conteúdo – é um prazer agradecer-lhe a inspiração!

Convenções

Alguns dos exercícios dispersos pelo texto contêm resultados auxiliares, onde se omitem as palavras "mostre que" quando se espera que seja claro que o que há a fazer é mesmo a verificação. Noções conhecidas do ensino secundário podem surgir envolvidas em exercícios mesmo antes de serem introduzidas no texto.

Normalmente, pontos são representados por letras maiúsculas, matrizes por letras maiúsculas a grosso, vectores por letras minúsculas a grosso, espaços vectoriais e afins por letras maiúsculas em tipo caligráfico, e aplicações por letras (romanas ou gregas) minúsculas. A não ser que haja indicação em contrário, todos os espaços vectoriais são reais.

Capítulo 1

Geometria Afim

A Geometria Afim no plano estuda as relações entre pontos e rectas definidos num conjunto. *Ponto* e *recta* são os objectos básicos onde assenta o sistema axiomático de Euclides para a Geometria Afim no plano, na sua formulação moderna (em finais do século XIX) por David Hilbert. Existe um sistema axiomático análogo para Geometria Afim no espaço.

Neste texto opta-se por introduzir a Geometria Afim com um sistema baseado no conceito de *vector*. Tirando partido dos conhecimentos de Álgebra Linear, esta substituição permite desenvolver a teoria mais simples e rapidamente. Esta substituição reflecte o papel central do conceito de vector em Matemática moderna. Recorde-se que vectores são uma abstracção matemática para quantidades caracterizadas pela sua magnitude e pela sua direcção, tais como forças e velocidades.

1.1 Espaços Afins

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial real.[1]

Definição 1.1 *Um* **espaço afim** *sobre $\mathcal{V}$ é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma aplicação*[2] *α que associa a cada par de pontos de $\mathcal{A}$ um vector de $\mathcal{V}$,*

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB}\ , \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- *para todo o ponto $A \in \mathcal{A}$, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \alpha_A: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & B & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

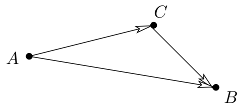
[1] O conceito de espaço vectorial real é revisto no Apêndice 1.13. Todos os resultados e noções deste capítulo podem ser generalizados ao caso de espaços vectoriais complexos ou espaços vectoriais sobre outros *corpos de característica nula*, definidos na disciplina de Álgebra Geral.

[2] Uma **aplicação** é simplesmente uma função; é costume guardar o nome *função* para as funções com valores reais ou complexos tratadas em Análise (estudo de derivadas, integrais, etc.) e usa-se o termo *aplicação* quando se pretende reforçar que se trata de uma correspondência entre conjuntos com um carácter mais geométrico (usada para extrair relações entre pontos).

é uma bijecção, e

- *para todo o terno de pontos $A, B, C \in \mathcal{A}$ é satisfeita a seguinte relação, denominada* **relação triangular***:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\ .$$



A relação triangular tem por consequência que:

- $\overrightarrow{AA} = 0$ e
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Dois pontos de um espaço afim determinam um vector por intermédio da aplicação α. Informalmente, pode-se dizer que um espaço afim *é como* um espaço vectorial, *excepto que* não tem uma origem (vector nulo) destacada. Escolhido um ponto arbitrário A de um espaço afim $\mathcal{A}$, pode-se visualizar todos os pontos de $\mathcal{A}$ como vectores formando um espaço vectorial, onde todas as propriedades são obtidas por transferência pela aplicação α_A. Isto é explicado no último parágrafo desta secção.

Chama-se **dimensão** do espaço afim $\mathcal{A}$ à dimensão do espaço vectorial subjacente $\mathcal{V}$. O conjunto vazio é, como habitual, um exemplo patológico: trata-se de um espaço afim sobre qualquer espaço vectorial, pelo que se convenciona que não tem dimensão. Daqui em diante, assume-se que todos os espaços afins com que se trabalha não são vazios.

Notação. Denota-se um espaço afim apenas pela letra que representa o seu conjunto de pontos ($\mathcal{A}$ na definição anterior), admitindo que o espaço vectorial subjacente $\mathcal{V}$ e a aplicação α ficam claros do contexto ou das explicações. $\diamondsuit$

Exemplos.

1. Qualquer espaço vectorial $\mathcal{V}$ tem uma estrutura natural[3] de espaço afim: a aplicação α é dada pela diferença de vectores

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathcal{V}\times\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \longmapsto & \mathbf{v}-\mathbf{u}\ . \end{array}$$

   Em particular, todos os $\mathbb{R}^n$ são espaços afins.

2. Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são espaços afins sobre os espaços vectoriais $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ respectivamente, então o seu produto cartesiano $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é naturalmente um espaço

[3] Esta estrutura diz-se *natural* porque não envolve escolhas; trata-se apenas de aproveitar *naturalmente* a própria estrutura de espaço vectorial. Daqui em diante, sempre que se referir à estrutura de espaço afim num espaço vectorial dado, tem-se em mente esta estrutura natural.

afim sobre a soma directa dos espaços vectoriais $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$[4]. A aplicação α correspondente a $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é dada pelo *produto* das aplicações α_1 e α_2 de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$:

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \times (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) & \longrightarrow & \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \\ & ((A_1, A_2), (B_1, B_2)) & \longmapsto & (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) \ . \end{array}$$

◊

Da relação triangular segue a **regra do paralelogramo** que afirma a equivalência das igualdades

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \ .$$

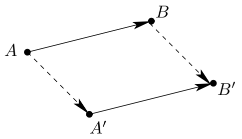
De facto, esta equivalência resulta das igualdades

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} \ ,$$

tomando a sua diferença

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} \ .$$

Quando uma das duas igualdades equivalentes se verifica, diz-se que $AA'BB'$ é um **paralelogramo**.



Exercício 1. As diagonais de um paralelogramo intersectam-se no seu ponto médio, ou seja, se $AA'BB'$ é um paralelogramo e $C \in \mathcal{A}$ satisfaz $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AC}$, então C também satisfaz $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'C}$. △

Notação. Se A é um ponto do espaço afim $\mathcal{A}$ e se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ é um vector do espaço vectorial subjacente, o único ponto $B \in \mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ é, por vezes, representado por $B = A + \mathbf{v}$. Graças à relação triangular, esta notação é coerente pois tem-se a associatividade

$$(A + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = A + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \ .$$

◊

[4]A *soma directa* de espaços vectoriais $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ é o conjunto $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ equipado com a estrutura linear

$$\begin{array}{ll} \lambda \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) \ , & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \ , \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \ , & \forall (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \ . \end{array}$$

A dimensão do espaço soma directa $\mathcal{V}$ é a soma das dimensões de $\mathcal{U}$ e de $\mathcal{V}$. A soma directa dos espaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ representa-se por $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

Fixado um ponto A de um espaço afim $\mathcal{A}$, define-se uma estrutura de espaço vectorial pela bijecção

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_A : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & B & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \ . \end{array}$$

Esta aplicação permite transportar a estrutura de espaço vectorial de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{A}$, ou seja, diz-se que $B + C = D$ se se verificar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Para realçar que esta estrutura depende fortemente da escolha do ponto A, representa-se o espaço vectorial por $\mathcal{V}_A$. Note-se que o papel de origem de $\mathcal{A}$ passa a ser desempenhado pelo ponto A pois $\overrightarrow{AA} = 0$. Enquanto que um espaço vectorial possui uma estrutura natural de espaço afim, um espaço afim *não* possui uma estrutura *natural* de espaço vectorial.

1.2 Subespaços Afins

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre um espaço vectorial $\mathcal{V}$.

Definição 1.2 *Um subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é um* **subespaço afim** *se contém um ponto A tal que a imagem de $\mathcal{B}$ pela bijecção α_A é um subespaço vectorial de $\mathcal{V}$.*

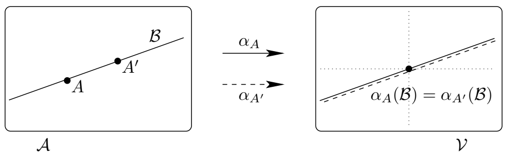
Exercício 2. Seja $\mathcal{B}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$.

(a) Existe um subespaço vectorial $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que *para qualquer ponto $B \in \mathcal{B}$* tem-se $\alpha_B(\mathcal{B}) = \mathcal{W}$.

Sugestão: Se $A, B \in \mathcal{B}$, então $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}$.

(b) O subespaço afim $\mathcal{B}$ *é um espaço afim* sobre $\mathcal{W}$. Diz-se então que $\mathcal{B}$ é um **subespaço afim sobre** $\mathcal{W}$.

△



Reciprocamente, tem-se que:

Proposição 1.3 *Se $\mathcal{W}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{V}$ e $A \in \mathcal{A}$, então existe um e um só subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo A.*

Demonstração. Se $\mathcal{B}$ é um subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo A, então tem que ser $\alpha_A(\mathcal{B}) = \mathcal{W}$ e $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}\}$, donde se conclui a unicidade.

Por outro lado, o conjunto $\{B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}\}$ define bem um subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo A, donde se mostra a existência. □

Definição 1.4 *Se $\mathcal{B}$ é um subespaço afim sobre o subespaço vectorial $\mathcal{W}$, diz-se que $\mathcal{B}$ tem a* **direcção** *$\mathcal{W}$.*

Qualquer subespaço afim é naturalmente um espaço afim. A dimensão de um subespaço afim é a dimensão do subespaço vectorial subjacente.

Exemplos.

1. Um espaço afim de dimensão zero é constituído por um só ponto, pelo que qualquer subconjunto constituído por um único ponto de $\mathcal{A}$ é um subespaço afim.

2. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais, e seja $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Para todo o vector $\mathbf{w}$ na imagem de f, a sua imagem inversa,[5] $f^{-1}(\mathbf{w})$, é um subespaço afim de $\mathcal{V}$ (onde se considera em $\mathcal{V}$ a sua estrutura natural de espaço afim) com direcção dada pelo núcleo de f.

   Exercício 3. Verificar esta asserção.

   Sugestão: Para $\mathbf{v} \in f^{-1}(\mathbf{w})$, por definição tem-se que $\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

   △

   Por outras palavras, o conjunto de soluções de um sistema de equações lineares, quando não é vazio, é um subespaço afim sobre o subespaço vectorial constituído pelas soluções do sistema homogéneo associado.

3. Em geral, os subespaços afins de um espaço vectorial $\mathcal{V}$ são os subespaços da forma $\mathbf{v}_0 + \mathcal{W}$, onde $\mathcal{W}$ é um subespaço vectorial e $\mathbf{v}_0$ é um vector de $\mathcal{V}$. A dimensão do espaço afim $\mathbf{v}_0 + \mathcal{W}$ é igual à dimensão do espaço vectorial $\mathcal{W}$. Os subespaços vectoriais são exactamente os subespaços afins que contêm a origem 0.

◇

Chama-se **rectas** e **planos** aos espaços ou subespaços afins de dimensão 1 e 2, respectivamente. Num espaço afim de dimensão n, chama-se **hiperplanos** aos subespaços afins de dimensão $n-1$.

1.3 Intersecção de Subespaços Afins

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$. Do facto de qualquer intersecção de subespaços vectoriais ser um subespaço vectorial segue que:

Proposição 1.5 *Qualquer intersecção não vazia de subespaços afins é um subespaço afim.*

[5] A **imagem inversa** de um ponto $\mathbf{w}$ por uma aplicação f é o conjunto de todos os pontos no domínio de f cuja imagem por f é $\mathbf{w}$. A imagem inversa de $\mathbf{w}$ por f é por vezes também designada a *fibra* da aplicação f em $\mathbf{w}$.

Demonstração. Seja $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ uma família de subespaços afins de $\mathcal{A}$ indexada por um conjunto I. Seja $\mathcal{B}$ a sua intersecção, a qual por definição é

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \in \mathcal{B}_i \ , \ \forall i \in I\} \ .$$

Se $\mathcal{B}$ não é vazio, escolha-se um ponto B de $\mathcal{B}$, i.e., $B \in \mathcal{B}_i$ para todo o $i \in I$. Há que mostrar que a imagem $\alpha_B(\mathcal{B})$ é um subespaço vectorial de V.

Por definição de subespaço afim, cada imagem $\alpha_B(\mathcal{B}_i)$ é um subespaço vectorial $\mathcal{W}_i$ do espaço vectorial $\mathcal{V}$. Seja $\mathcal{W}$ a intersecção de todos os $\mathcal{W}_i$ em $\mathcal{V}$. Qualquer intersecção de subespaços vectoriais é um subespaço vectorial, pelo que $\mathcal{W}$ é um subespaço vectorial.

Verifica-se finalmente que $\alpha_B(\mathcal{B})$ é igual a W (donde segue que $\mathcal{B}$ é o subespaço afim sobre $\mathcal{W}$ contendo o ponto B). Com efeito, as seguintes equivalências resultam da aplicação α_B ser bijectiva e das definições de $\mathcal{B}$, W_i e W:

$$\begin{aligned} v \in \alpha_B(\mathcal{B}) &\iff \alpha_B^{-1}(v) \in \mathcal{B} \\ &\iff \alpha_B^{-1}(v) \in \mathcal{B}_i \ , \ \forall i \in I \\ &\iff v \in \alpha_B(\mathcal{B}_i) \ , \ \forall i \in I \\ &\iff v \in W_i \ , \ \forall i \in I \\ &\iff v \in W \ . \end{aligned}$$

□

Corolário 1.6 *Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto qualquer de $\mathcal{A}$. A intersecção de todos os subespaços afins de $\mathcal{A}$ contendo $\mathcal{S}$ é o menor subespaço afim contendo $\mathcal{S}$.*

Este resultado é consequência imediata da proposição anterior. Por *menor* subespaço afim contendo $\mathcal{S}$ entende-se o subespaço afim que contém $\mathcal{S}$ e que está contido em todos os subespaços afins que contêm $\mathcal{S}$. Esse subespaço é designado o **subespaço afim gerado por** $\mathcal{S}$ e é simbolizado por $\langle \mathcal{S} \rangle$.

Exemplo. Se $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ é um subconjunto finito, o subespaço $\langle A_0, A_1, \ldots, A_k\rangle$ é o subespaço afim contendo o ponto A_0, sobre o subespaço vectorial gerado pelos k vectores $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$. Em particular, a sua dimensão é no máximo k. ◇

Recorde-se da Álgebra Linear que os k vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$ são *independentes* se $\dim\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = k$, onde $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ é o subespaço vectorial gerado por (ou a *expansão linear* de) esses vectores; em geral tem-se que $\dim\langle v_1, \ldots, v_k\rangle \leq k$. Quando $k = \dim V$ e os vectores $v_1, \ldots, v_k$ são independentes, diz-se que $(v_1, \ldots, v_k)$ é uma *base* (ou um referencial linear) de V.

Definição 1.7 *Os $k+1$ pontos $A_0, A_1, \ldots, A_k$ são* **independentes** *se a dimensão do subespaço $\langle A_0, A_1, \ldots, A_k\rangle$ gerado por eles é k. Quando $k = \dim \mathcal{A}$ e os pontos $A_0, A_1, \ldots, A_k$ são independentes, diz-se que $(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ é um* **referencial afim** *de $\mathcal{A}$.*

Exemplos.

1. Tome-se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ com a sua estrutura natural de espaço afim. A dimensão de $\mathcal{A}$ (como espaço afim) é n. Os $n+1$ pontos

$$\begin{aligned} A_0 &= (0,\ldots,0) \\ A_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ A_2 &= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\vdots \\ A_n &= (0,\ldots,0,1) \end{aligned}$$

são *afimmente* independentes porque os n vectores

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0A_1} &= A_1 - A_0 = A_1 \\ &\vdots \\ \overrightarrow{A_0A_n} &= A_n - A_0 = A_n \end{aligned}$$

são *linearmente* independentes. Logo $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ é um referencial afim do espaço afim $\mathbb{R}^n$, e $(A_1, \ldots, A_n)$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$.

2. Um referencial afim de uma recta é constituído por dois pontos (distintos) uma vez que:

Exercício 4. Por dois pontos (distintos) de um espaço afim passa uma e uma só recta. $\triangle$

Três ou mais pontos $A, B, \ldots, C \in \mathcal{A}$ dizem-se **colineares** se pertencerem a uma recta, ou seja, se $\dim\langle A, B, \ldots, C\rangle \leq 1$; para pontos colineares também se diz que *estão alinhados.*

3. Três pontos são independentes se e só se não forem colineares. Mais geralmente, $k+1$ pontos são independentes se e só se cada um não pertence ao subespaço gerado pelos restantes pontos.

Exercício 5. Os pontos $A_0, A_1, \ldots, A_k$ de um espaço afim são independentes se e só se

$$A_i \notin \langle A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k\rangle \ , \quad \forall i = 0, \ldots, k \ .$$

$\triangle$

$\diamondsuit$

Notação. O símbolo $\langle A, B\rangle$ representa, quando os pontos A e B são distintos, a **recta que passa em** A **e em** B. No caso de espaços afins sobre um espaço vectorial real[6], usa-se o símbolo $[A, B]$ para designar o **segmento de recta limitado por** A **e** B, isto é, o conjunto dos pontos C da recta $\langle A, B\rangle$ tais que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$. Chama-se então a A e a B os **extremos** do

[6] Na definição de segmento, usa-se a ordenação dos números reais; esta é uma propriedade específica do corpo $\mathbb{R}$, pelo que a noção de segmento não se estende aos outros corpos.

segmento $[A, B]$. Quando não houver risco de ambiguidade, representa-se, tanto a recta que passa em A e B, como o segmento limitado por estes dois pontos, simplesmente por AB. $\diamondsuit$

Exercício 6.

(a) Um subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ é um subespaço afim se e só se para todos os pontos $B, C \in \mathcal{D}$ se tem a inclusão $\langle B, C\rangle \subseteq \mathcal{D}$.

(b) Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dois subespaços afins de $\mathcal{A}$. Quando é que a união $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é um subespaço afim?

$\triangle$

1.4 Paralelismo

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$.

Definição 1.8 *Dois subespaços afins $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dizem-se* **paralelos** *se têm a mesma direcção. Quando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são paralelos, escreve-se abreviadamente $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$, e lê-se que $\mathcal{B}$* é paralelo a *$\mathcal{C}$.*

Note-se que dois subespaços podem ser disjuntos ($\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$) sem serem paralelos. Por exemplo, de acordo com esta definição, uma recta nunca é paralela a um plano. Por outro lado:

Exercício 7. Num plano, duas rectas que não se intersectam são forçosamente paralelas. $\triangle$

Exemplo. Se $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma aplicação linear, todos os subespaços $f^{-1}(\mathbf{v})$ (para $\mathbf{v}$ na imagem de f) são paralelos, uma vez que todos têm a direcção do núcleo de f. $\diamondsuit$

Proposição 1.9 *Se $\mathcal{B}$ é paralelo a $\mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ ou são iguais ou disjuntos.*

Demonstração. Suponha-se que $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ não é vazio. Há que mostrar que então $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Seja A um ponto da intersecção. Pela Proposição 1.3, existe um único subespaço afim contendo A com a direcção de $\mathcal{B}$ (igual à direcção de $\mathcal{C}$). Como $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são ambos subespaços afins contendo A e com a direcção de $\mathcal{B}$, por unicidade conclui-se que se tem necessariamente a igualdade $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. $\square$

Proposição 1.10 (Postulado das Paralelas) *Por cada ponto de um espaço afim passa uma e uma só recta paralela a uma dada recta.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 1.3, o ponto $A \in \mathcal{A}$ e a direcção $\mathcal{W}$ da recta dada determinam completamente a recta paralela procurada:

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AB} \in \mathcal{W}\} \ .$$

$\square$

Recorde-se que, dados dois subespaços vectoriais $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$ de um espaço vectorial $\mathcal{V}$, diz-se que $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$ **juntos geram** $\mathcal{V}$, o que se pode representar por $\mathcal{W}+\mathcal{U}=\mathcal{V}$, se $\mathcal{V}$ é o menor subespaço vectorial que contém $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$. Em geral, a soma de dois subespaços vectoriais $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$ é o subespaço vectorial

$$\mathcal{W}+\mathcal{U}=\{w+u \mid w\in\mathcal{W}, u\in\mathcal{U}\}\ .$$

Proposição 1.11 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dois subespaços afins de $\mathcal{A}$, com as direcções $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$, respectivamente. Suponha-se que $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$ juntos geram $\mathcal{V}$. Então qualquer subespaço paralelo a $\mathcal{C}$ intersecta $\mathcal{B}$.*

A demonstração baseia-se no seguinte lema.

Lema 1.12 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dois subespaços afins de $\mathcal{A}$, com as direcções $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}$, respectivamente. Sejam B um ponto de $\mathcal{B}$ e C um ponto de $\mathcal{C}$. Para que $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ não seja vazio é necessário e suficiente que o vector $\overrightarrow{BC}$ esteja em $\mathcal{W}+\mathcal{U}$.*

Demonstração da Proposição 1.11. Sejam B um ponto de $\mathcal{B}$ e A um ponto de $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C}'$ o subespaço afim contendo A e com a direcção $\mathcal{U}$ (ou seja, paralelo a $\mathcal{C}$). Escrevendo $\overrightarrow{BA}\in\mathcal{V}=\mathcal{W}+\mathcal{U}$ e aplicando o Lema 1.12 a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}'$, conclui-se que $\mathcal{C}'$ intersecta $\mathcal{B}$. $\square$

Demonstração do Lema 1.12. Se a intersecção $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ não é vazia, escolha-se aí um ponto A. Tem-se então que

$$\overrightarrow{BA}=\mathbf{w}\in\mathcal{W} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CA}=\mathbf{u}\in\mathcal{U}\ ,$$

pelo que

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}\in\mathcal{W}+\mathcal{U}\ .$$

Reciprocamente, se o vector $\overrightarrow{BC}$ está em $\mathcal{W}+\mathcal{U}$, escreva-se

$$\overrightarrow{BC}=\mathbf{w}-\mathbf{u} \quad \text{com } \mathbf{w}\in\mathcal{W} \text{ e } \mathbf{u}\in\mathcal{U}\ .$$

O ponto A definido por $\mathbf{w}=\overrightarrow{BA}$ está em $\mathcal{B}$, por construção. Uma vez que $\overrightarrow{BC}=\mathbf{w}+\overrightarrow{AC}$, tem-se que $\mathbf{u}=\overrightarrow{CA}$ está em $\mathcal{U}$. Logo o ponto A também está em $\mathcal{C}$. $\square$

1.5 Coordenadas Cartesianas

Um referencial afim $(A_0,A_1,\ldots,A_n)$ de um espaço afim $\mathcal{A}$ pode ser usado para atribuir *coordenadas* aos pontos de $\mathcal{A}$, declarando o ponto A_0 como sendo a origem e os vectores $\overrightarrow{A_0A_1},\ldots,\overrightarrow{A_0A_n}$ como sendo uma base. Concretamente:

Definição 1.13 *As* **coordenadas cartesianas** *de um ponto $B\in\mathcal{A}$ no referencial afim $(A_0,A_1,\ldots,A_n)$ são as componentes $(x_1,\ldots,x_n)$ do vector $\overrightarrow{A_0B}$ na base $\overrightarrow{A_0A_1},\ldots,\overrightarrow{A_0A_n}$ do espaço vectorial subjacente a $\mathcal{A}$.*

A escolha da base $(\overrightarrow{A_0A_1},\ldots,\overrightarrow{A_0A_n})$ fornece um isomorfismo ψ entre os espaços vectoriais V e $\mathbb{R}^n$ dado pelas componentes nessa base. As coordenadas de B são dadas pela sua imagem na aplicação composta

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_{A_0}} & V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \\ B & \longmapsto & x_1\overrightarrow{A_0A_1}+\ldots+x_n\overrightarrow{A_0A_n} & \longmapsto & (x_1,\ldots,x_n)\ . \end{array}$$

A linguagem das coordenadas (envolvendo a escolha de um referencial afim) pode ser usada para descrever subespaços afins. Como se viu na Proposição 1.3, um ponto $A\in\mathcal{A}$ e uma direcção em V (i.e., um subespaço vectorial $W\subseteq V$) determinam um subespaço afim $\mathcal{B}$. Escolhendo uma base $(w_1,\ldots,w_k)$ para a direcção W pode-se escrever

$$W=\left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i w_i \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}\right\}\ .$$

Então o conjunto $\mathcal{B}$ descreve-se:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} & = & \{B\in\mathcal{A}\mid \overrightarrow{AB}\in W\} \\ & = & \{B\in\mathcal{A}\mid \overrightarrow{AB}=\lambda_1w_1+\ldots+\lambda_kw_k \text{ com cada } \lambda_i\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{B\in\mathcal{A}\mid B=A+\lambda_1w_1+\ldots+\lambda_kw_k \text{ com cada } \lambda_i\in\mathbb{R}\}\ . \end{array}$$

Sejam $(a_1,\ldots,a_n)$ as coordenadas cartesianas do ponto A no referencial afim $(A_0,A_1,\ldots,A_n)$, e sejam $(w_i^1,\ldots w_i^n)$ as componentes do vector w_i relativamente à base $(\overrightarrow{A_0A_1},\ldots,\overrightarrow{A_0A_n})$ de V. Em termos de coordenadas cartesianas, os pontos $B=A+w\in\mathcal{B}$ (com w a variar em W) satisfazem o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & a_1+\lambda_1w_1^1+\ldots+\lambda_kw_k^1 \\ \vdots & & \\ x_n & = & a_n+\lambda_1w_1^n+\ldots+\lambda_kw_k^n\ . \end{array}\right.$$

Estas equações, onde os x_i's são dados em termos dos parâmetros variáveis $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$, formam o **sistema de equações paramétricas para** $\mathcal{B}$.

Exemplo. No espaço afim $\mathcal{A}=\mathbb{R}^3$, considere-se o subespaço descrito parametricamente relativamente ao referencial standard (ver Exemplo 1 da Secção 1.3 com $n=3$) por

$$\mathcal{B}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1+7\lambda+2\mu \\ x_2 & = & -\lambda+3\mu \\ x_3 & = & 5 \end{array}\right.\ ,\ \text{com } \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\ .$$

O subespaço $\mathcal{B}$ passa pelo ponto $A=(1,0,5)$ e tem direcção $\mathcal{W}=\langle v_1,v_2\rangle$ onde $v_1=(7,-1,0)$ e $v_2=(2,3,0)$ são vectores independentes. Assim $\mathcal{B}$ é o plano horizontal (i.e., paralelo ao plano x_1,x_2) com cota (ou altura) $x_3=5$. $\diamondsuit$

Em alternativa, um subespaço afim também pode ser descrito por *equações cartesianas*. Fixada uma base $(e_1,\ldots,e_n)$ de V, o subespaço vectorial W pode ser descrito por um sistema de m equações cartesianas

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta_{1,1}x_1+\ldots+\beta_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ \beta_{m,1}x_1+\ldots+\beta_{m,n}x_n & = & 0\ , \end{array}\right.$$

onde $m = n-k$ é a codimensão de W em V. Os pontos $B \in \mathcal{B}$ são caracterizados pela equação $\overrightarrow{AB} \in W$, o que em coordenadas se traduz no sistema,

$$\begin{cases} \beta_{1,1}(x_1 - a_1) + \ldots + \beta_{1,n}(x_n - a_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \beta_{m,1}(x_1 - a_1) + \ldots + \beta_{m,n}(x_n - a_n) & = & 0 \ , \end{cases}$$

chamado **sistema de equações cartesianas para** $\mathcal{B}$; ou seja,

$$\begin{cases} \beta_{1,1}x_1 + \ldots + \beta_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ \beta_{m,1}x_1 + \ldots + \beta_{m,n}x_n & = & b_m \ , \end{cases}$$

onde $b_i = \sum_j \beta_{i,j} a_j$.

Exercício 8. Sob que condições é que as duas equações

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \quad \text{e} \quad a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b'$$

descrevem hiperplanos paralelos em $\mathbb{R}^n$? $\triangle$

Em termos mais sintéticos, as equações cartesianas descrevem o subespaço afim $\mathcal{B}$ como sendo a imagem inversa do ponto $(b_1, \ldots, b_m)$ pela aplicação linear (cf. Exercício 2)

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

dada, relativamente às bases $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots \overrightarrow{A_0A_n})$ de V e canónica de $\mathbb{R}^m$, pela matriz

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m,1} & \cdots & \beta_{m,n} \end{pmatrix} .$$

1.6 Aplicações Afins

As aplicações afins são para a Geometria Afim o que as aplicações lineares são para a Álgebra Linear. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ espaços afins sobre $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente.

Definição 1.14 *Uma aplicação* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *diz-se uma* **aplicação afim** *se existe um ponto* $A \in \mathcal{A}$ *e uma aplicação linear* $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *tais que*

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB}) \ , \quad \textit{para qualquer } B \in \mathcal{A} \ .$$

Note-se que a aplicação linear f não depende da escolha do ponto A. De facto, se A' é um outro ponto, tem-se

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi(A')\varphi(B)} &= \overrightarrow{\varphi(A')\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \\ &= -\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \\ &= -f(\overrightarrow{AA'}) + f(\overrightarrow{AB}) \\ &= f(\overrightarrow{A'A}) + f(\overrightarrow{AB}) \\ &= f(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) \\ &= f(\overrightarrow{A'B}) \ . \end{aligned}$$

Como a aplicação linear f só depende de φ, será daqui em diante representada por $\overrightarrow{\varphi}$ e chamada a **aplicação linear associada** à aplicação afim φ. Nesta notação, acima mostrou-se que

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) \ , \qquad \forall A, B \in \mathcal{A} \ .$$

Proposição 1.15 *A composta de duas aplicações afins é uma aplicação afim com aplicação linear associada dada pela composta das aplicações lineares associadas aos factores.*

Demonstração. Sejam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ duas aplicações afins. Por definição,

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) \ , \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}$$

e

$$\overrightarrow{\psi(B)\psi(B')} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{BB'}) \ , \quad \forall B, B' \in \mathcal{B} \ .$$

Tomando $B = \varphi(A)$ e $B' = \varphi(A')$, obtém-se que

$$\overrightarrow{\psi(\varphi(A))\psi(\varphi(A'))} = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')}) = \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AA'})) \ , \quad \forall A, A' \in \mathcal{A} \ ,$$

donde se conclui que a composição $\psi \circ \varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é uma aplicação afim e

$$\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi} \ .$$

$\square$

Exemplos.

1. A aplicação constante que envia $\mathcal{A}$ para um só ponto é afim, sendo a aplicação linear associada a aplicação nula.

2. Quando $\mathcal{A} = \mathcal{C} = \mathbb{R}$, as aplicações afins são as aplicações da forma $x \mapsto ax + b$, sendo as aplicações lineares associadas da forma $x \mapsto ax$.

3. Mais geralmente, se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são dois espaços vectoriais munidos das suas estruturas afins naturais, uma aplicação $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é afim se e só se existe um vector $\mathbf{b} \in \mathcal{W}$ e uma aplicação linear $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{b}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

   Exercício 9. Verificar esta asserção. $\triangle$

4. Quando $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, as aplicações afins para as quais a aplicação linear associada é a identidade no espaço vectorial subjacente, são as aplicações $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tais que $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$ para todos os $A, B \in \mathcal{A}$. Pela regra do paralelogramo, tem-se que $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{B\varphi(B)}$ para todos os $A, B \in \mathcal{A}$. Mostrou-se que o vector $\overrightarrow{A\varphi(A)}$ é um vector constante $\mathbf{u}$. Diz-se então que φ é a **translação** pelo vector $\mathbf{u}$ e representa-se por $\tau_{\mathbf{u}}$.

5. Sejam A um ponto fixo de um espaço afim $\mathcal{A}$, λ um escalar e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a aplicação afim definida por $\overrightarrow{A\varphi(B)} = \lambda\overrightarrow{AB}$. A aplicação linear associada a φ é a dilatação vectorial de factor λ (ou *homotetia de razão* λ). Chama-se a φ a **dilatação** de centro A e de factor λ (ou *homotetia de centro* A *e razão* λ) e representa-se por $\delta_{A,\lambda}$.

$\diamondsuit$

Do facto da imagem de um subespaço vectorial por uma aplicação linear ser um subespaço vectorial segue que:

Proposição 1.16 *A imagem de um subespaço afim por uma aplicação afim é um subespaço afim.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ uma aplicação afim, e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ um subespaço afim com a direcção $\mathcal{W}$ passando por um ponto $B \in \mathcal{B}$.

Exercício 10. A imagem $\varphi(\mathcal{B})$ é o subespaço afim com a direcção $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$ passando pelo ponto $\varphi(B) \in \mathcal{C}$. $\triangle$

$\square$

Exercício 11. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{Mv} + \mathbf{b}$, com

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Calcular a imagem por φ das seguintes rectas:

(a) $y = 2x$;

(b) $3x - y + 1 = 0$.

$\triangle$

Uma vez que a imagem de um subespaço vectorial por uma aplicação linear tem dimensão menor ou igual à do subespaço de partida, obtém-se que a imagem de um subespaço afim por uma aplicação afim tem dimensão menor ou igual à do subespaço de partida, e consequentemente:

Corolário 1.17 *Uma aplicação afim leva pontos colineares para pontos colineares.*

Exercício 12. Quando não é vazia, a imagem inversa de um subespaço afim por uma aplicação afim é um subespaço afim.

> **Sugestão:** A imagem inversa de um subespaço vectorial por uma aplicação linear é um subespaço vectorial.

$\triangle$

Exercício 13. A aplicação afim $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{Mv} + \mathbf{b}$, que leva os pontos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para os pontos $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ tem $\mathbf{b} = \mathbf{p}$ e $\mathbf{M}$ a matriz com colunas $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ e $\mathbf{r} - \mathbf{p}$. $\triangle$

Exercício 14. Calcular a aplicação afim $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva os pontos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para os pontos

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

$\triangle$

Tal como uma aplicação linear é determinada pelas imagens de vectores de uma base, tem-se que:

Exercício 15. Uma aplicação afim é determinada pela imagem de um referencial afim. $\triangle$

Portanto, a única aplicação afim de um espaço afim de dimensão n nele próprio que fixa $n+1$ pontos independentes é a aplicação identidade. Em particular, uma aplicação afim de um plano nele próprio que fixa três pontos não colineares é a identidade. E uma aplicação afim de um plano nele próprio que fixa dois pontos distintos, também fixa todos os pontos da recta por eles gerada.

Nota. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ espaços afins com aplicações $\alpha : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ e $\gamma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{W}$, e seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ uma aplicação entre eles. A condição da definição de aplicação afim,

$$\underbrace{\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}}_{\gamma_{\varphi(A)}(\varphi(B))} = \overrightarrow{\varphi}(\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\alpha_A(B)}) , \quad \text{para quaisquer } A, B \in \mathcal{A} ,$$

traduz-se, em termos de α e γ, na igualdade das aplicações compostas

$$\gamma_{\varphi(A)} \circ \varphi = \overrightarrow{\varphi} \circ \alpha_A , \quad \text{para qualquer } A \in \mathcal{A} .$$

Esquematicamente diz-se que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathcal{V} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \overrightarrow{\varphi} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma_{\varphi(A)}} & \mathcal{W} \end{array}$$

é *comutativo*, no sentido em que a aplicação do canto superior esquerdo para o canto inferior direito obtida por seguir primeiro para a direita e depois para baixo é igual à aplicação obtida por seguir primeiro para baixo e depois para a direita. Repare-se que as aplicações horizontais são bijectivas e que as verticais são, a da esquerda, afim e, a da direita, linear. É como se as bijecções α_A e $\gamma_{\varphi(A)}$ traduzissem a aplicação afim φ na aplicação linear associada $\overrightarrow{\varphi}$. $\diamondsuit$

Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim, onde os espaços $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão munidos de referenciais afins $(A_0, \ldots, A_n)$ e $(B_0, \ldots, B_m)$, respectivamente. Relativamente a estes referenciais, os pontos são representados por coordenadas cartesianas (definidas na Secção 1.5), chamadas $(x_1, \ldots, x_n)$ para os pontos de $\mathcal{A}$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ para os pontos de $\mathcal{B}$. Através das bijecções $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} \to \mathbb{R}^m$ dadas pelas escolhas das coordenadas, a aplicação φ traduz-se numa aplicação afim $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se $(x_1, \ldots, x_n)$ forem as coordenadas de um ponto $A \in \mathcal{A}$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ forem as coordenadas do ponto $\varphi(A)$, tem-se, para certas constantes reais b_i e $\beta_{i,j}$, a relação

$$\begin{cases} y_1 & = & \beta_{1,1} x_1 + \ldots + \beta_{1,n} x_n + b_1 \\ \vdots & & \\ y_m & = & \beta_{m,1} x_1 + \ldots + \beta_{m,n} x_n + b_m . \end{cases}$$

Matricialmente escreve-se

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m,1} & \cdots & \beta_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} . \end{array}$$

1.7 Grupo Afim

Um **grupo** é um conjunto $\mathcal{G}$ equipado com uma operação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (g,h) & \longmapsto & g \circ h \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- associatividade: $(g \circ h) \circ j = g \circ (h \circ j)$, $\forall g,h,j \in \mathcal{G}$;
- existência de identidade: $\exists e \in \mathcal{G} : e \circ g = g \circ e = g$, $\forall g \in \mathcal{G}$;
- existência de inversos: $\forall g \in \mathcal{G}\ \exists g^{-1} \in \mathcal{G} : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

O conjunto de todas as aplicações lineares bijectivas de um espaço vectorial $\mathcal{V}$ nele próprio forma um grupo, representado por $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ e chamado o **grupo linear (geral)** de $\mathcal{V}$. Quando $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, o grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ identifica-se naturalmente com o grupo das matrizes reais invertíveis n por n, uma vez que cada aplicação linear corresponde a uma matriz; nesta identificação, a composição de aplicações traduz-se no produto de matrizes. No caso em que $n = 1$, o grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{R})$ identifica-se com o grupo dos escalares reais não nulos, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; a composição de aplicações traduz-se no produto usual.

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$ e seja $\mathrm{GAf}(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as aplicações afins bijectivas de $\mathcal{A}$ para si próprio. O conjunto $\mathrm{GAf}(\mathcal{A})$ é fechado para a composição de aplicações pelo que se viu na Secção 1.6. Ora:

- a composição de quaisquer aplicações é associativa, pelo que a composição de aplicações afins bijectivas é associativa;
- a aplicação identidade $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, que leva cada ponto para ele próprio, é afim, é bijectiva e é elemento neutro para a composição de aplicações;
- a próxima proposição mostra que a condição da existência de inversos também é satisfeita para o conjunto $\mathrm{GAf}(\mathcal{A})$ equipado com a composição de aplicações;

pelo que ele é um grupo. Chama-se **grupo afim** de $\mathcal{A}$ ao conjunto $\mathrm{GAf}(\mathcal{A})$ equipado com a composição.

Proposição 1.18

(a) Uma aplicação φ afim é bijectiva se e só se a aplicação linear associada $\overrightarrow{\varphi}$ é bijectiva.

(b) Se a aplicação φ é bijectiva, então a sua inversa φ^{-1} é afim e

$$\overrightarrow{\varphi^{-1}} = (\overrightarrow{\varphi})^{-1} .$$

Demonstração.

(a) A equivalência das bijectividades de φ e $\overrightarrow{\varphi}$ segue da observação do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathcal{V} \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\overrightarrow{\varphi} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma_{\varphi(A)}} & \mathcal{W} \end{array}$$

onde as aplicações horizontais são bijectivas.

(b) Se a aplicação φ é bijectiva, a sua inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ está bem definida. Por *(a)*, a aplicação linear $\overrightarrow{\varphi}$ é bijectiva, pelo que $(\overrightarrow{\varphi})^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ está bem definida e é linear porque a inversa de uma aplicação linear é linear. Para mostrar que φ^{-1} é afim, basta mostrar que $f = (\overrightarrow{\varphi})^{-1}$ verifica a condição da definição de aplicação afim

$$\overrightarrow{\varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)} = f(\overrightarrow{AB}) , \quad \text{para quaisquer } A, B \in \mathcal{A} .$$

Mas como φ é afim, i.e.,

$$\overrightarrow{\varphi(A')\varphi(B')} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{A'B'}) , \quad \text{para quaisquer } A', B' \in \mathcal{A} ,$$

tem-se, escrevendo $A' = \varphi^{-1}(A)$ e $B' = \varphi^{-1}(B)$ (todos os pontos são desta forma pois φ é bijectiva), que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{\varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)}) , \quad \text{para quaisquer } A, B \in \mathcal{A} .$$

Aplicando $f = (\overrightarrow{\varphi})^{-1}$ a ambos os membros, obtém-se

$$f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(B)} , \quad \text{para quaisquer } A, B \in \mathcal{A} .$$

$\square$

Exercício 16. Calcular a inversa da seguinte aplicação afim bijectiva

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} . \end{array}$$

Quais são as aplicações lineares associadas a φ e a φ^{-1}? $\triangle$

Os elementos de $\mathrm{GAf}(\mathcal{A})$ chamam-se **isomorfismos afins**.

Proposição 1.19 *Um isomorfismo afim leva rectas para rectas e rectas paralelas para rectas paralelas.*

Demonstração. Da Proposição 1.16 (e do Exercício 1.6) sabe-se que a imagem de uma recta com direcção $\mathcal{W}$ por um isomorfismo afim φ é um subespaço afim com a direcção $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$. Como $\overrightarrow{\varphi}$ é um isomorfismo linear, tem-se que $\dim \overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W}) = \dim \mathcal{W} = 1$. Duas rectas com a mesma direcção $\mathcal{W}$ têm por imagens duas rectas com a mesma direcção $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$. □

Exercício 17. Como se pode descrever o grupo afim de $\mathbb{R}$ (com a estrutura natural de espaço afim)? △

Do ponto de vista de teoria de grupos, o facto da aplicação linear associada à composta de dois isomorfismos afins ser a composta das aplicações lineares associadas aos factores, traduz-se na aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GAf}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \\ \varphi & \longmapsto & \overrightarrow{\varphi} \end{array}$$

ser um *homomorfismo de grupos*: $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$. Verifica-se ainda que este homomorfismo é sobrejectivo (Exercício!), mas não é geralmente injectivo: o seu núcleo (i.e., o conjunto das aplicações afins cuja aplicação linear associada é a identidade) é o conjunto das translações (definidas na Secção 1.6), o qual é parametrizado pelo espaço vectorial $\mathcal{V}$. Em particular, o conjunto das translações forma um *subgrupo* – um subconjunto não vazio fechado para a operação e para a inversão (i.e., a tomada de inversos) – de $\mathrm{GAf}(\mathcal{A})$ Do ponto de vista da acção no espaço, as transformações correspondentes aos isomorfismos afins englobam as transformações lineares invertíveis, as translações e as compostas destas.

1.8 Teorema de Tales

Como preparação para a demonstração do teorema de Tales,[7] vai-se discutir *projecções* em geometria afim.

Começa-se por rever as projecções lineares. Se um espaço vectorial $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ é a soma directa de espaços vectoriais $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, chama-se **projecção em $\mathcal{U}$ ao longo de $\mathcal{W}$** à aplicação

$$\begin{array}{cccc} p_1 : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & (u,w) & \longmapsto & u \ ; \end{array}$$

analogamente define-se a projecção p_2 em $\mathcal{W}$ ao longo de $\mathcal{U}$. Estas projecções são aplicações lineares.

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$, com subespaços afins $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente, tais que a aplicação soma

$$\begin{array}{cccc} s : & \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & (u,w) & \longmapsto & u + w \end{array}$$

é um isomorfismo. Os espaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ dizem-se então *directamente complementares*. Tem-se necessariamente a fórmula para as dimensões $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} + \dim \mathcal{C}$. Pela Proposição 1.11, como $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ juntos geram $\mathcal{V}$, tem-se que a intersecção $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ não é vazia. Se esta intersecção contivesse dois pontos distintos, então conteria a recta definida por esses pontos, pelo que a dimensão da intersecção seria positiva, o que contradiz a fórmula para as dimensões. Conclui-se que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ é constituído por exactamente um ponto, que se chamará A. A aplicação composta

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha_A} \mathcal{V} \xrightarrow{p_1} \mathcal{U} \xrightarrow{\alpha_A^{-1}} \mathcal{B}$$

chama-se a **projecção em $\mathcal{B}$ ao longo de $\mathcal{C}$** e representa-se por $\pi_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Analogamente a aplicação $\pi_2 = \alpha_A^{-1} \circ p_2 \circ \alpha_A : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é a projecção em $\mathcal{C}$ ao longo de $\mathcal{B}$. Ambas π_1 e π_2 são aplicações afins com aplicações lineares associadas $\overrightarrow{\pi_1} = p_1$ e $\overrightarrow{\pi_2} = p_2$. Note-se que A é um ponto fixo por ambas.

[7] Tales de Mileto viveu no século VI a.C. e faz parte da galeria de gregos que, no primeiro milénio antes de Cristo, começaram a transformar a arte empírica da geometria na primeira ciência sistemática.

Exemplo. Seja $\mathcal{A}$ um plano com espaço vectorial subjacente (bidimensional) $\mathcal{V}$. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas rectas não paralelas em $\mathcal{A}$, sobre os subespaços vectoriais (unidimensionais) $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente. Pelo não paralelismo de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, os subespaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ são diferentes e necessariamente complementares: $\mathcal{V} \simeq \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ onde o isomorfismo linear é dado pela aplicação soma $(u,w) \mapsto u + w$. Consideram-se as projecções π_1 na recta $\mathcal{B}$ ao longo da recta $\mathcal{C}$ e π_2 na recta $\mathcal{C}$ ao longo da recta $\mathcal{B}$. ♢

O seguinte é um dos resultados, devidos a Tales de Mileto, que são ainda importantes nos nossos dias.

Teorema 1.20 (Teorema de Tales) *Seja $\mathcal{A}$ um plano afim com três rectas paralelas distintas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, e com duas rectas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ tais que*

$$\mathcal{B} \nparallel \mathcal{C}_i \ \text{e} \ \mathcal{B}' \nparallel \mathcal{C}_i \ , \quad i = 1,2,3 \ .$$

Sejam A_i e A_i' os pontos de intersecção de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}_i$ e de $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}_i$, respectivamente, $i = 1,2,3$.

(a) Então

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1'A_3'}}{\overrightarrow{A_1'A_2'}} \ .$$

(b) Reciprocamente, se um ponto B satisfaz

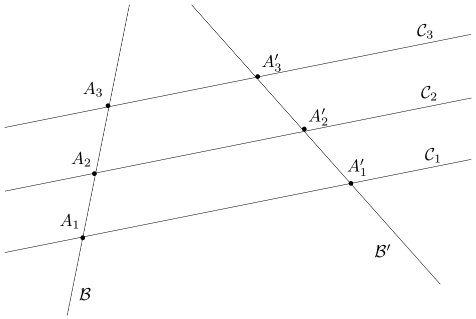
$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1'A_3'}}{\overrightarrow{A_1'A_2'}} \ .$$

então $B \in \mathcal{C}_3$ (e $B = A_3$).

A razão de vectores no enunciado do teorema faz sentido, pois se A_1, A_2 e A_3 são pontos colineares com $A_1 \neq A_2$, então $\overrightarrow{A_1A_3}$ é proporcional a $\overrightarrow{A_1A_2}$, pelo que se define a razão $\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}}$ como sendo o escalar λ que verifica $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}$.

Demonstração.

(a) Seja π a projecção em $\mathcal{B}'$ ao longo de $\mathcal{C}_1$ com projecção linear associada $p = \overrightarrow{\pi}$. Como cada $\overrightarrow{A_iA_i'}$ pertence à direcção de $\mathcal{C}_1$ (que é igual à direcção



de $\mathcal{C}_i$), a projecção π leva cada A_i para A'_i, $i = 1, 2, 3$. Por definição de p, tem-se

$$p(\overrightarrow{A_iA_j}) = \overrightarrow{\pi(A_i)\pi(A_j)} = \overrightarrow{A'_iA'_j} \ .$$

Portanto, se for $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ e como p é linear:

$$p(\overrightarrow{A_1A_3}) = \lambda p(\overrightarrow{A_1A_2}) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{A'_1A'_3} = \lambda\overrightarrow{A'_1A'_2} \ .$$

Conclui-se então que

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{A'_1A'_3}}{\overrightarrow{A'_1A'_2}} \ .$$

(b) A hipótese traduz-se na igualdade dos vectores

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{\overrightarrow{A'_1A'_3}}{\overrightarrow{A'_1A'_2}}\overrightarrow{A_1A_2} \ ,$$

mas a parte *(a)* mostra que também se tem

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A'_1A'_3}}{\overrightarrow{A'_1A'_2}}\overrightarrow{A_1A_2} \ .$$

A igualdade de $\overrightarrow{A_1B}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ garante que $B = A_3$, pelo que $B \in \mathcal{C}_3$.

□

Note-se que, por exemplo, trocando os índices 1 e 3 na parte *(a)*, conclui-se igualmente que

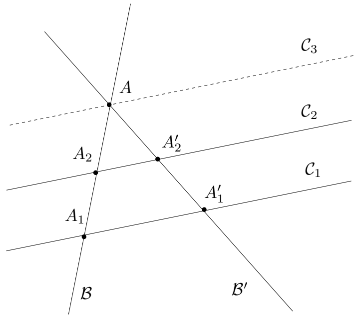
$$\frac{\overrightarrow{A_3A_1}}{\overrightarrow{A_3A_2}} = \frac{\overrightarrow{A'_3A'_1}}{\overrightarrow{A'_3A'_2}} \ .$$

Corolário 1.21 *Seja $\mathcal{A}$ um plano afim com duas rectas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (distintas e não paralelas) intersectando-se no ponto A, e sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas rectas paralelas tais que*

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_i = \{A_i\} \text{ e } \mathcal{B}' \cap \mathcal{C}_i = \{A'_i\} \ , \quad i = 1, 2, 3 \ ,$$

com $A_i \neq A$ e $A'_i \neq A$. Então

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1A'_1}}{\overrightarrow{A_2A'_2}} \ .$$



Demonstração. Tome-se a recta, chamada $\mathcal{C}_3$, paralela a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e passando por A. Aplicando a parte *(a)* do Teorema de Tales (com os índices como escrito na fórmula que precede o corolário) com $A_3 = A'_3 = A$, obtém-se:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}} \ .$$

Seja λ o valor comum destas razões. Calculando a diferença das igualdades

$$\overrightarrow{AA'_1} = \lambda\overrightarrow{AA'_2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AA_1} = \lambda\overrightarrow{AA_2}$$

resulta, pela relação triangular,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AA'_1} + \overrightarrow{A_1A} = \lambda(\overrightarrow{AA'_2} + \overrightarrow{A_2A}) \\ \Longleftrightarrow \quad & \overrightarrow{A_1A'_1} = \lambda\overrightarrow{A_2A'_2} \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda = \frac{\overrightarrow{A_1A'_1}}{\overrightarrow{A_2A'_2}} \ . \end{aligned}$$

□

1.9 Teorema de Pappus

Os teoremas de Pappus[8] e de Desargues[9] podem ser demonstrados a partir do de Tales (Teorema 1.20) usando dilatações e translações.

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$, seja A um ponto de $\mathcal{A}$ e seja λ um escalar real fixo. A **dilatação** de centro A e razão λ é a aplicação afim $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por

$$\overrightarrow{A\varphi(B)} = \lambda\overrightarrow{AB} \ .$$

Por outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathcal{V} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \text{mult.por}\lambda \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathcal{V} \end{array}$$

onde as setas horizontais são bijecções e a aplicação linear vertical da direita (multiplicação pelo escalar λ no espaço vectorial $\mathcal{V}$) é também chamada uma *dilatação linear* de razão λ. A dilatação φ representa-se por $\delta_{A,\lambda}$.

Exercício 18. Duas dilatações com o mesmo centro comutam e

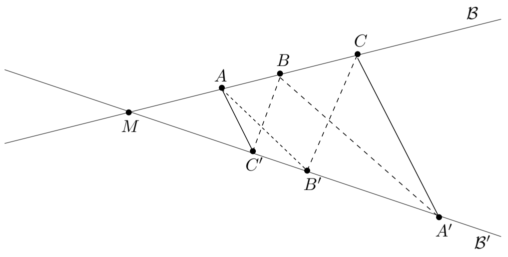
$$\delta_{A,\lambda} \circ \delta_{A,\mu} = \delta_{A,\mu} \circ \delta_{A,\lambda} = \delta_{A,\lambda\cdot\mu} \ .$$

Sugestão: O produto pelo escalar λ comuta com o produto pelo escalar μ.

$\triangle$

Representa-se aqui por AB a recta gerada pelos pontos A e B.

Teorema 1.22 (Teorema de Pappus) *Seja $\mathcal{A}$ um plano afim com duas rectas distintas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Tomem-se três pontos sobre cada recta, chamados A, B, C sobre $\mathcal{B}$ e A', B', C' sobre $\mathcal{B}'$. Se $AB' \parallel BA'$ e $BC' \parallel CB'$, então $AC' \parallel CA'$.*



Demonstração. Há dois casos: ou $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{B}'$, ou $\mathcal{B} \parallel \mathcal{B}'$.

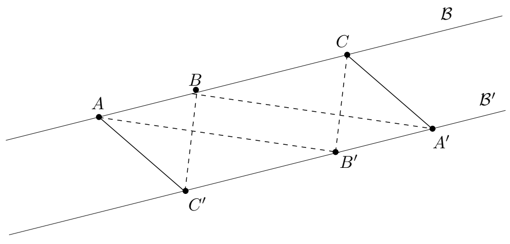
[8] Pappus de Alexandria viveu no século IV e o seu teorema aqui discutido é crucial para a geometria projectiva.

[9] Desargues foi um matemático francês do século XVII contemporâneo de Descartes, Mersenne e Pascal.

Caso em que $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{B}'$.

Seja M o ponto de intersecção de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, e sejam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a dilatação de centro M que leva A para B e $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a dilatação de centro M que leva B para C. Pela parte *(a)* do teorema de Tales, φ leva B' para A' e ψ leva C' para B'. Então $\psi \circ \varphi$ leva A para C e $\varphi \circ \psi$ leva C' para A'. Por se tratar de dilatações com o mesmo centro, φ e ψ comutam, ou seja, $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. A composta $\varphi \circ \psi (= \psi \circ \varphi)$ é uma dilatação com centro M que leva A para C e C' para A'. Mas pela parte *(b)* do teorema de Tales, isto garante que $AC' \parallel CA'$.

Caso em que $\mathcal{B} \parallel \mathcal{B}'$.



Neste caso, em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ não se intersectam, aplica-se um argumento semelhante ao anterior substituindo as dilatações por translações. Sejam $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a translação que leva A para B e $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a translação de centro M que leva B para C. Pela parte *(a)* do teorema de Tales, φ leva B' para A' e ψ leva C' para B'. Então $\psi \circ \varphi$ leva A para C e $\varphi \circ \psi$ leva C' para A'. Como quaisquer duas translações comutam, tem-se $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. A composta $\varphi \circ \psi (= \psi \circ \varphi)$ é uma translação que leva A para C e C' para A'. Mas pela parte *(b)* do teorema de Tales, isto garante que $AC' \parallel CA'$.

$\square$

1.10 Teorema de Desargues

O teorema de Desargues lida com *triângulos*. Sejam A, B e C três pontos de um espaço afim $\mathcal{A}$. Chama-se **triângulo** ABC ao conjunto

$$[A, B] \cup [B, C] \cup [A, C] \ .$$

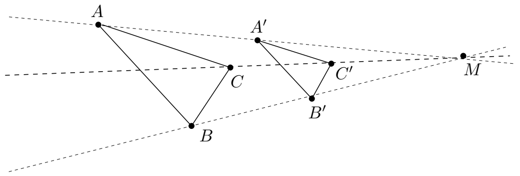
Os pontos A, B e C chamam-se os **vértices** de ABC e os segmentos de recta $[A, B]$, $[B, C]$ e $[A, C]$ chamam-se os **lados** (ou *arestas*) de ABC. O triângulo ABC diz-se **degenerado** se A, B e C são pontos colineares.

Continua-se a representar por AB a recta gerada pelos pontos A e B. Diz-se que duas ou mais rectas distintas são **concorrentes** se a sua intersecção é não vazia. Como segue do Exercício 1.4, num plano duas rectas distintas são concorrentes se e só se não são paralelas. Mas num plano três ou mais rectas distintas só são concorrentes se a sua intersecção simultânea for não vazia, ou seja, se existir um ponto comum a todas elas; em geral, três rectas não concorrentes não têm que ser paralelas.

Teorema 1.23 (Teorema de Desargues) *Seja $\mathcal{A}$ um plano afim com dois triângulos, ABC e $A'B'C'$, sem vértices comuns e cujos lados correspondentes são paralelos. Então as três rectas AA', BB' e CC' ou são concorrentes ou são paralelas.*

Demonstração. Há dois casos: ou $AA' \nparallel BB'$, ou $AA' \parallel BB'$.

Caso em que $AA' \nparallel BB'$. Seja M o ponto de intersecção de AA' e BB'. Há que mostrar que $M \in CC'$.



Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a dilatação de centro M que leva A para A'. Pela parte *(a)* do teorema de Tales, φ leva B para B'. Seja λ a razão da dilatação φ (i.e., $\overrightarrow{MA'} = \lambda\overrightarrow{MA}$) e seja $C'' = \varphi(C)$, i.e., $\overrightarrow{MC''} = \lambda\overrightarrow{MC}$. Basta mostrar que $C'' = C'$, porque isto garante que M, C e C' são colineares, logo CC' passa no ponto M.

Como $\overrightarrow{MA'} = \lambda\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MC''} = \lambda\overrightarrow{MC}$, pela parte *(b)* do teorema de Tales, conclui-se que $A'C'' \parallel AC$, ou seja, que

$$C'' \in \underbrace{\text{recta paralela a } AC \text{ contendo } A'}_{A'C'} \ .$$

Do mesmo modo (trocando A e A' por B e B'), como $\overrightarrow{MB'} = \lambda\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{MC''} = \lambda\overrightarrow{MC}$, pela parte *(b)* do teorema de Tales, conclui-se que $B'C'' \parallel BC$, ou seja, que

$$C'' \in \underbrace{\text{recta paralela a } BC \text{ contendo } B'}_{B'C'} \ .$$

Pertencendo às duas rectas $A'C'$ e $B'C'$, o ponto C'' está na sua intersecção

$$A'C' \cap B'C' = \{C'\} \ ,$$

donde resulta que $C'' = C'$.

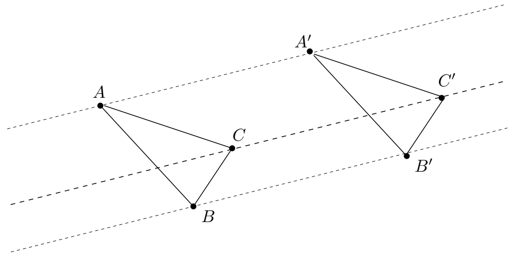
Caso em que $AA' \parallel BB'$. O argumento é parecido com o anterior usando uma translação em vez de uma dilatação.

Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a translação que leva A para A'. Por paralelismo das rectas, tem-se as seguintes relações de proporcionalidade de vectores

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BB'} = \mu\overrightarrow{AA'} \ , \quad \text{para certos } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

Da relação triangular, segue que

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{AB'} =)\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} \ ,$$



e da independência linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AA'}$, segue que $\lambda = \mu = 1$. Verificou-se assim que $AA'BB'$ é um paralelogramo. Logo, φ leva B para B'. Seja $C'' = \varphi(C)$, i.e., $\overrightarrow{CC''} = \lambda\overrightarrow{AA'}$. Basta mostrar que $C'' = C'$, porque isto garante que $CC' \parallel AA'$.

Pela regra do paralelogramo, sendo $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC''}$, tem-se também que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C''}$, pelo que

$$C'' \in \underbrace{\text{recta paralela a } AC \text{ contendo } A'}_{A'C'} \ .$$

Do mesmo modo, trocando A e A' por B e B', tem-se que

$$C'' \in \underbrace{\text{recta paralela a } BC \text{ contendo } B'}_{B'C'} \ .$$

Então

$$C'' \in A'C' \cap B'C' = \{C'\} \ ,$$

donde resulta que $C'' = C'$.

□

1.11 Baricentros

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre o espaço vectorial real $\mathcal{V}$.

Definição 1.24 *Um* **sistema de massas pontuais** *é uma colecção de pares $((B_1, \beta_1), \dots, (B_k, \beta_k))$ onde os B_i's são pontos de $\mathcal{A}$ e os β_i's são números reais, designados* **massas**.

Proposição 1.25 *Se $((B_1, \beta_1), \dots, (B_k, \beta_k))$ é um sistema de massas pontuais onde a soma das massas $\sum_i \beta_i$ não é nula, então existe um único ponto $G \in \mathcal{A}$ satisfazendo a igualdade*

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \overrightarrow{GB_i} = 0 \ .$$

Além disso, o ponto G satisfaz

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \beta_i \overrightarrow{AB_i}}{\sum_{i=1}^{k} \beta_i} , \quad \forall A \in \mathcal{A} .$$

Demonstração. *Existência.* Escolha-se um ponto M qualquer e defina-se G pela fórmula

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \beta_i \overrightarrow{MB_i}}{\sum_{i=1}^{k} \beta_i} .$$

Então, pela relação triangular

$$\begin{aligned}
\sum \beta_i \overrightarrow{GB_i} &= \sum \beta_i \left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB_i} \right) \\
&= \sum \beta_i \left(-\frac{\sum \beta_i \overrightarrow{MB_i}}{\sum \beta_i} + \overrightarrow{MB_i} \right) \\
&= \sum \beta_i \left(\frac{-\sum \beta_i \overrightarrow{MB_i}}{\sum \beta_i} \right) + \sum \beta_i \overrightarrow{MB_i} \\
&= -\sum \beta_i \overrightarrow{MB_i} + \sum \beta_i \overrightarrow{MB_i} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Unicidade. Sejam G e G' pontos satisfazendo

$$\sum \beta_i \overrightarrow{GB_i} = 0 \quad \text{e} \quad \sum \beta_i \overrightarrow{G'B_i} = 0 .$$

Então, pela relação triangular

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GG'} &= \frac{\sum \beta_i}{\sum \beta_i} \overrightarrow{GG'} \\
&= \frac{\sum \beta_i \left(\overrightarrow{GB_i} + \overrightarrow{B_iG'} \right)}{\sum \beta_i} \\
&= \frac{\sum \beta_i \overrightarrow{GB_i}}{\sum \beta_i} - \frac{\sum \beta_i \overrightarrow{G'B_i}}{\sum \beta_i} \\
&= 0 + 0 ,
\end{aligned}$$

donde $G = G'$.

Segunda parte. Uma vez que o ponto M escolhido para mostrar a existência podia ser qualquer, e já se constatou a unicidade de G, fica garantida a satisfação da segunda parte da proposição. Ela também pode ser confirmada calculando (para $A \in \mathcal{A}$ arbitrário)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum \beta_i}{\sum \beta_i} \overrightarrow{AG} = \frac{\sum \beta_i \left(\overrightarrow{AB_i} + \overrightarrow{B_iG} \right)}{\sum \beta_i} = \frac{\sum \beta_i \overrightarrow{AB_i}}{\sum \beta_i} + 0 .$$

$\square$

O único ponto G nas condições da Proposição 1.25 chama-se o **baricentro** (ou **centro de massa**) do sistema. Note-se que o baricentro do sistema $((B_1, \lambda\beta_1), \ldots, (B_k, \lambda\beta_k))$, onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ coincide com o baricentro do sistema $((B_1, \beta_1), \ldots, (B_k, \beta_k))$. Quando todas as massas são iguais, o baricentro diz-se o **equibaricentro** (ou **centro geométrico**) dos pontos $B_1, \ldots, B_k$.

No caso de um sistema com apenas dois pontos

$$((A, \mu), (B, \lambda))$$

onde $\mu \neq -\lambda$, obtém-se a fórmula

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\mu \overrightarrow{AA} + \lambda \overrightarrow{AB}}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overrightarrow{AB} .$$

O equibaricentro de dois pontos A e B é o **ponto médio** do segmento $[A, B]$.

O equibaricentro de três pontos A, B e C é o **centro** do triângulo ABC.

Tomar o baricentro de um sistema é uma operação que satisfaz associatividade, como se verifica no próximo exercício. Por palavras, para encontrar o baricentro de um sistema grande, pode-se primeiro calcular o baricentro de subsistemas (i.e., subconjuntos do sistema original) disjuntos, e depois tomar o baricentro dos sistema formado pelos baricentros dos subsistemas pesados com massas dadas pelas somas das massas dos elementos de cada subconjunto.

Exercício 19. Dados escalares $\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,k_1}, \quad \ldots \quad \beta_{r,1}, \ldots, \beta_{r,k_r}$, com somas $\sum_j \beta_{i,j}$ e $\sum_{i,j} \beta_{i,j}$ diferentes de zero, seja G o baricentro do sistema de massas pontuais

$$((B_{1,1}, \beta_{1,1}), \ldots, (B_{1,k_1}, \beta_{1,k_1}), \ldots, (B_{r,1}, \beta_{r,1}), \ldots, (B_{r,k_r}, \beta_{1,k_r})) ,$$

e seja G_i $(i = 1, \ldots, r)$ o baricentro do sistema

$$((B_{i,1}, \beta_{i,1}), \ldots, (B_{i,k_i}, \beta_{i,k_i})) .$$

Então G é também o baricentro do sistema

$$((G_1, \sum_j \beta_{1,j}), \ldots, (G_r, \sum_j \beta_{r,j})) .$$

$\triangle$

De seguida verifica-se que *aplicações afins preservam baricentros*, mostrando que a noção de baricentro é uma noção da geometria afim.

Proposição 1.26 *A imagem do baricentro do sistema* $((B_1, \beta_1), \ldots, (B_k, \beta_k))$ *pela aplicação afim* φ *é o baricentro do sistema* $((\varphi(B_1), \beta_1), \ldots, (\varphi(B_k), \beta_k))$.

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ uma aplicação afim. Sendo G o sistema de massas pontuais $((B_1, \beta_1), \ldots, (B_k, \beta_k))$, o ponto $\varphi(G)$ verifica

$$\sum \beta_i \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(B_i)} = \sum \beta_i \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{GB_i}) = \overrightarrow{\varphi} \left(\sum \beta_i \overrightarrow{GB_i} \right) = \overrightarrow{\varphi}(0) = 0 ,$$

portanto, pela unicidade afirmada na Proposição 1.25, tem que ser este o baricentro do sistema imagem. $\square$

Reciprocamente, tem-se uma caracterização das aplicações afins em termos do seu comportamento relativamente a baricentros.

Proposição 1.27 *Se uma aplicação φ transforma sempre o baricentro de quaisquer duas massas pontuais $((A,\beta),(B,1-\beta))$ no baricentro do sistema imagem $((\varphi(A),\beta),(\varphi(B),1-\beta))$, então essa aplicação é afim.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ uma aplicação verificando a hipótese. O baricentro do sistema $((A,\beta),(B,1-\beta))$ é o ponto G que satisfaz

$$\overrightarrow{MG} = \beta\overrightarrow{MA} + (1-\beta)\overrightarrow{MB} \ , \quad \forall M \in \mathcal{A} \ ,$$

enquanto que o baricentro, G', do sistema $((\varphi(A),\beta),(\varphi(B),1-\beta))$ satisfaz

$$\overrightarrow{M'G'} = \beta\overrightarrow{M'\varphi(A)} + (1-\beta)\overrightarrow{M'\varphi(B)} \ , \quad \forall M' \in \mathcal{C} \ .$$

Para M fixo, defina-se uma aplicação $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ por $f(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}$. Quando se mostrar que f é linear, fica provado que φ é afim com $\overrightarrow{\varphi} = f$. É claro que $f(0) = f(\overrightarrow{MM}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(M)} = 0$. Pela hipótese acerca de φ e pelas propriedades dos baricentros, a aplicação f verifica

$$\begin{aligned} f(\beta\overrightarrow{MA} + (1-\beta)\overrightarrow{MB}) &= f(\overrightarrow{MG}) \\ &= \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(G)} \\ &= \overrightarrow{\varphi(M)G'} \\ &= \beta\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(A)} + (1-\beta)\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(B)} \\ &= \beta f(\overrightarrow{MA}) + (1-\beta)f(\overrightarrow{MB}) \ , \ \forall A, B \in \mathcal{A} \ . \quad (\star) \end{aligned}$$

Escolhendo $B = M$ e chamando $\mathbf{v} = \overrightarrow{MA}$, a equação $(\star)$ dá a condição para a multiplicação por escalares:

$$f(\beta\mathbf{v}) = \beta f(\mathbf{v}) \ , \qquad \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ .$$

Sendo $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$, tome-se $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $\mathbf{v} = \overrightarrow{MA}$ e $\mathbf{u} = \overrightarrow{MB}$. Escolhendo $\beta = \frac{1}{2}$, obtém-se da relação $(\star)$ que

$$f(\tfrac{1}{2}\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}f(\mathbf{v}) + \tfrac{1}{2}f(\mathbf{u}) \ .$$

Multiplicando ambos os membros por 2 e usando a condição para a multiplicação por escalares, conclui-se a condição para a adição de vectores:

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) \ , \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V} \ .$$

□

Considerando na Proposição 1.26 o baricentro de sistemas de dois pontos com massas com o mesmo sinal (ambas positivas, por exemplo), obtém-se:

Corolário 1.28 *A imagem de um segmento por uma aplicação afim é um segmento.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ uma aplicação afim e $[A,B]$ um segmento de recta em $\mathcal{A}$. O segmento pode ser descrito

$$\begin{aligned} [A,B] &= \{G \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB} \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \\ &= \{G \in \mathcal{A} \mid G \text{ é baricentro de } ((A,1-\lambda),(B,\lambda)) \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \end{aligned}$$

Por definição de conjunto imagem e pela Proposição 1.25, tem-se

$$\begin{aligned} &\varphi([A,B]) \\ = \ &\{\varphi(G) \in \mathcal{C} \mid G \in [A,B]\} \\ = \ &\{\varphi(G) \in \mathcal{C} \mid \overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB} \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \\ = \ &\{\varphi(G) \in \mathcal{C} \mid G \text{ é baricentro de } ((A,1-\lambda),(B,\lambda)) \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \\ = \ &\{G' \in \mathcal{C} \mid G' \text{ é baricentro de } ((\varphi(A),1-\lambda),(\varphi(B),\lambda)) \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \\ = \ &\{G' \in \mathcal{C} \mid \overrightarrow{\varphi(A)G'} = \lambda\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} \ , \ 0 \le \lambda \le 1\} \\ = \ &[\varphi(A), \varphi(B)] \ , \end{aligned}$$

o que é um segmento. □

Na demonstração anterior mostrou-se que a imagem do segmento é da forma

$$\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)] \ .$$

Como consequência imediata, a imagem de um triângulo por uma aplicação afim é um triângulo e

$$\varphi(ABC) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) \ .$$

Chama-se **polígono** $ABC \ldots K$ ao conjunto

$$[A,B] \cup [B,C] \cup \ldots \cup [J,K] \ .$$

Os pontos $A, B, \ldots K$ chamam-se os **vértices** e os segmentos de recta $[A,B], \ldots, [J,K]$ chamam-se os **lados** (ou *arestas*) do polígono $AB \ldots K$. A imagem de um polígono por uma aplicação afim é um polígono e

$$\varphi(AB \ldots K) = \varphi(A)\varphi(B) \ldots \varphi(K) \ .$$

1.12 Convexidade

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre o espaço vectorial real $\mathcal{V}$. A *convexidade* de um subconjunto $\mathcal{C}$ significa que qualquer segmento com os extremos em $\mathcal{C}$ está contido inteiramente em $\mathcal{C}$.

Definição 1.29 *O subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ é* **convexo** *se*

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \ , \qquad [A,B] \subseteq \mathcal{C} \ .$$

Por exemplo, qualquer recta, plano ou, em geral, subespaço afim é um subconjunto convexo. Um disco no plano ou um ovo cheio são convexos. Um conjunto formado por dois discos disjuntos, ou um conjunto em forma de ferradura, ou uma carapaça esférica (i.e., uma esfera oca) não são convexos.

Exercício 20. Qualquer intersecção de subconjuntos convexos é um subconjunto convexo. △

Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto qualquer de $\mathcal{A}$. O **invólucro convexo** de $\mathcal{S}$ é a intersecção de todos os subconjuntos convexos de $\mathcal{A}$ que contêm $\mathcal{S}$. O invólucro convexo de $\mathcal{S}$ é pois o *menor subconjunto convexo que contém* $\mathcal{S}$ no sentido em que está contido em qualquer subconjunto convexo que contenha $\mathcal{S}$.

A proposição seguinte mostra que a noção de convexidade é uma noção da geometria afim, uma vez que *aplicações afins preservam convexidade.*

Proposição 1.30

(a) A imagem de um subconjunto convexo por uma aplicação afim é um subconjunto convexo.

(b) A imagem inversa de um subconjunto convexo por uma aplicação afim é um subconjunto convexo.

Demonstração.

(a) Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim e seja $\mathcal{C}$ um subconjunto convexo em $\mathcal{A}$. Para mostrar que $\varphi(\mathcal{C})$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{B}$, há que verificar que, para quaisquer $A', B' \in \varphi(\mathcal{C})$, o segmento $[A', B']$ está contido em $\varphi(\mathcal{C})$. Por definição de conjunto imagem, existem pontos $A, B \in \mathcal{A}$ cujas imagens por φ são A' e B' respectivamente. A convexidade de $\mathcal{C}$ garante que $[A, B] \subseteq \mathcal{C}$. A demonstração do Corolário 1.28, garante então que

$$[A', B'] = [\varphi(A), \varphi(B)] = \varphi([A, B]) \subseteq \varphi(\mathcal{C}) \ .$$

(b) Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma aplicação afim e seja $\mathcal{C}'$ um subconjunto convexo em $\mathcal{B}$. Para mostrar que $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{A}$, há que verificar que, para quaisquer $A, B \in \varphi^{-1}(\mathcal{C}')$, ou seja, quaisquer dois pontos cujas imagens $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ estão em $\mathcal{C}'$, o segmento $[A, B]$ está contido em $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$, ou seja, a imagem $\varphi([A, B])$ está contida em $\mathcal{C}'$. Mas, pela demonstração do Corolário 1.28, tem-se $\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$, o que está necessariamente contido em $\mathcal{C}'$ por convexidade deste conjunto e porque $\varphi(A), \varphi(B) \in \mathcal{C}'$.

$\square$

1.13 Apêndice: Espaços Vectoriais Reais

Definição 1.31 *Um* **espaço vectorial real** *é um conjunto não vazio $\mathcal{V}$ munido de duas operações,*

- **adição de vectores***: a cada par de elementos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ é associado um terceiro elemento de $\mathcal{V}$, chamado* **soma** *de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e representado por $\mathbf{v}+\mathbf{w}$,*
- **multiplicação por escalares***: a cada elemento $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ e cada $\lambda \in \mathbb{R}$ é associado um elemento de $\mathcal{V}$, chamado* **produto** *de $\mathbf{v}$ e λ e representado por $\lambda\mathbf{v}$,*

satisfazendo as seguintes propriedades:

- **comutatividade da adição***:*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} \ , \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \ ,$$

- **associatividade da adição***:*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \ , \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \ ,$$

- **associatividade da multiplicação por escalares***:*

$$\lambda(\gamma\mathbf{v}) = (\lambda\gamma)\mathbf{v} \ , \ \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R} \ , \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ ,$$

- **distributividade relativamente à soma de vectores***:*

$$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \ ,$$

- **distributividade relativamente à soma de escalres***:*

$$(\lambda + \gamma)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \gamma\mathbf{v} \ , \ \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R} \ , \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ ,$$

- **existência de zero***: existe um elemento de $\mathcal{V}$ chamado* **zero** *e representado por $\mathbf{0}$, tal que*

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \ , \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ ,$$

- **existência de simétricos***: para todo o elemento $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, existe um elemento chamado o seu* **simétrico** *e representado por $-\mathbf{v}$ tal que*

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \ ,$$

- **existência de identidade***:*

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v} \ , \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ .$$

Os elementos de um espaço vectorial chamam-se **vectores**, enquanto que os elementos do corpo que actua por multiplicação ($\mathbb{R}$ na definição acima) chamam-se **escalares**. Um **espaço vectorial complexo** define-se analogamente, substituindo $\mathbb{R}$ pelo corpo $\mathbb{C}$. Mais geralmente, pode-se definir espaço vectorial sobre qualquer corpo K. Quando o corpo de escalares e as operações são claros do contexto, representa-se um espaço vectorial apenas pelo símbolo do conjunto dos seus vectores ($\mathcal{V}$ acima). Os espaços vectoriais também se designam por **espaços lineares**.

O protótipo de espaço vectorial real é o conjunto $\mathbb{R}^n$ de vectores de n componentes reais com a adição de vectores e o produto por escalares usuais.

Para os conceitos e resultados básicos sobre espaços vectoriais, veja-se [9], por exemplo.

Bibliografia

[1] Almeida, P., *Elementos de Estudo Relativos à Disciplina de Geometria I*, 2001.

[2] Audin, M., *Géométrie*, Belin, Paris, 1998.

[3] Beutelspacher, A., Rosenbaum, U., *Projective Geometry: from Foundations to Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] Brannan, D., Esplen, M., Gray, J., *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] Jennings, G., *Modern Geometry with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[6] Heilbron, J., *Geometry Civilized*, Oxford University Press, New York, 1998.

[7] Lages Lima, E., *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, IMPA, 2001.

[8] Lanczos, C., *Space through the Ages - The Evolution of Geometrical Ideas from Pythagoras to Hilbert and Einstein*, Academic Press, 1970.

[9] Magalhães, L., *Álgebra Linear como Introdução a Matemática Aplicada*, Texto Editora, 1989.

[10] Monier, J.-M., *Géométrie*, Dunod, 2000.

[11] Sernesi, E., *Linear Algebra, A Geometric Approach*, Chapman & Hall, 1993.

[12] Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, 1976.

[13] Ventura Araújo, P., *Curso de Geometria*, Gradiva, Lisboa, 1999.

[14] Wells, D., *Dicionário de Geometria Curiosa*, Gradiva, Lisboa, 1998.

Índice Remissivo