Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA I – LMAC

EXAME PARA PRATICAR – JUNHO DE 2002

apresente e justifique todos os cálculos

cotação: 2 valores por questão, duração: 3 horas

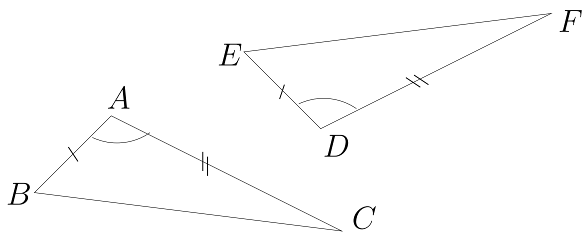
(1) Calcule a imagem da recta $y = 2x$ pela aplicação afim

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} . \end{array}$$

(2) Usando uma isometria, prove que se os triângulos ABC e DEF têm

$$|AB| = |DE| \ , \ |AC| = |DF| \ \text{ e } \measuredangle BAC = \measuredangle EDF \ ,$$

então $|BC| = |EF|$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$ e $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$.



(3) Suponha que no triângulo ABC a bissectriz do ângulo em A intersecta o lado BC no ponto X. Mostre que $\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

(4) Seja C um conjunto convexo de um espaço vectorial euclidiano E. Mostre que o conjunto dual $\check{C} = \{\mathbf{u} \in E \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq 1 \ , \ \forall \mathbf{v} \in C\}$ é um conjunto convexo.

(5) Qual a área de um triângulo esférico equilátero sobre a esfera unitária e com ângulos internos rectos? Qual o aspecto desse triângulo?

(6) Esboce as seguintes d-rectas e decida quais se intersectam, quais são paralelas e quais são ultra-paralelas.
(a) $L_1 = \{(x,y) \in \mathcal{D} \mid x + y = 0\}$;
(b) $L_2 = \{(x,y) \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 1 = 0\}$;
(c) $L_3 = \{(x,y) \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 - \sqrt{5}y + 1 = 0\}$.

(7) Para cada um dos seguintes pares de pontos do plano projectivo, escreva uma equação cartesiana para a recta projectiva que os contém, usando coordenadas homogéneas $[x, y, z]$:
(a) $[3, 2, 0]$ e $[3, 4, 0]$;
(b) $[1, 2, 1]$ e $[3, 0, 3]$;
(c) $[1, 1, -2]$ e $[4, -2, -2]$.

(8) Seja $P = (a\cos t, b\sin t)$ um ponto sobre a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > b > 0$ e $b^2 = a^2(1 - e^2)$, com $0 < e < 1$, seja Q o ponto de intersecção da recta normal à elipse em P com o eixo dos xx e seja $F = (ae, 0)$ um dos focos. Prove que $|QF| = e|PF|$.

(9) Encontre uma descrição paramétrica da superfície S de equação

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{z}\right)^2 = 4$$

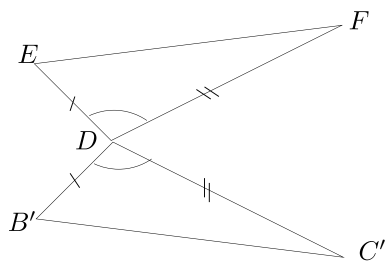
e verifique se o ponto $(8, 0, 0)$ é regular (para a parametrização encontrada).

(10) Esboce as circunferências centradas na origem num espaço de Minkowski, onde por circunferência centrada na origem se entende o conjunto de vectores com norma igual a uma dada constante.

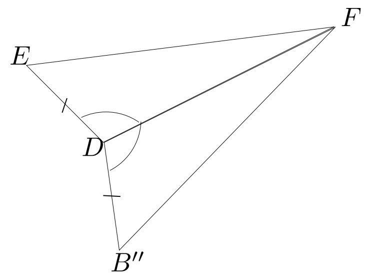
Soluções abreviadas:

(1) Sejam (x', y') as coordenadas no espaço de chegada de φ. Da conjunção de $y = 2x$ com as relações $x' = 4x+y+2$ e $y' = 2x+y-1$, obtém-se a equação cartesiana da imagem pedida: $2x'-3y' = 7$.

(2) Constrói-se a isometria por etapas. Com uma translação por $\overrightarrow{AD}$ do triângulo ABC a imagem do vértice A coincide com o ponto D. Sejam B' e C' as imagens de B e C, respectivamente. Por

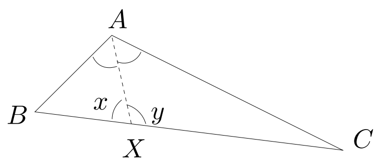


uma rotação do triângulo $DB'C'$ em torno do ponto D, leva-se o lado DC' a coincidir com o lado DF (estes dois lados têm o mesmo comprimento pela hipótese $|AC| = |DF|$ e por uma translação ser uma isometria). Seja B'' a imagem de B'. Como $\measuredangle FDB'' = \measuredangle DEF$, e $|DE| = |DB''|$, ou



$B'' = E$, ou uma reflexão ortogonal de DFB'' relativamente a DF leva B'' para E. A isometria que transforma ABC em DEF, e portanto demonstra as igualdades pedidas, é a composição das 2-3 isometrias descritas.

(3) Sejam x o ângulo em X do triângulo AXB e y o ângulo em X do triângulo AXC. Pela lei dos



senos aplicada a estes dois triângulos,

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{|XB|} = \frac{\sin x}{|AB|} \qquad \text{e} \qquad \frac{\sin\frac{A}{2}}{|XC|} = \frac{\sin y}{|AC|} \ .$$

Uma vez que $x + y = \pi$, os ângulos em x e em y têm o mesmo seno, donde

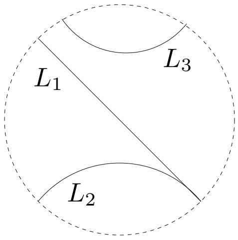
$$\frac{|XB|}{|AB|} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin x} = \frac{|XC|}{|AC|} \ ,$$

o que leva à fórmula pedida.

(4) Para mostrar que $\check{C}$ é convexo, basta mostrar que $(1-t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \in \check{C}$, $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \check{C}, \forall t \in [0,1]$. Sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \check{C}$ e $t \in [0,1]$ arbitrários. Por linearidade na primeira entrada do produto interno e pela definição do conjunto $\check{C}$, tem-se $((1-t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = (1-t)\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + t\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} \leq (1-t) + t = 1$ para qualquer $v \in C$, o que mostra que $(1-t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \in \check{C}$.

(5) Pela fórmula de Girard, a área de um triângulo esférico equilátero sobre a esfera de raio 1 e com ângulos internos rectos é $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$. Esse triângulo é um oitavo de esfera.

(6) As d-rectas L_1 e L_2 são paralelas, L_1 e L_3 são ultra-paralelas e L_2 e L_3 também são ultra-paralelas.



(7) (a) Ambos os pontos têm terceira coordenada nula, pelo que a equação é $z = 0$.
(b) Ambos os pontos têm a primeira e a terceira coordenadas iguais, pelo que a equação é $x = z$.
(c) Ambos os pontos estão sobre a recta $x + y + z = 0$.

(8) A recta tangente à elipse no ponto P tem equação cartesiana

$$\frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = 1 \ .$$

A recta normal à elipse no ponto P tem equação cartesiana

$$\frac{x \sin t}{b} - \frac{y \cos t}{a} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin t \cos t \ .$$

O ponto Q de intersecção da normal à elipse em P com o eixo dos xx tem coordenadas $(\frac{1}{a}(a^2 - b^2)\cos t, 0)$. As duas distâncias podem então ser calculadas explicitamente:

$$|QF| = |ae - \frac{1}{a}(a^2 - b^2)\cos t| = ae(1 - e\cos t)$$

e

$$|QF| = \sqrt{(a\cos t - ae)^2 + (b \sin t)^2} = \sqrt{a^2(1 - e\cos t)^2} \ .$$

Conclui-se que $e|PF| = |QF|$.

(9) A superfície S tem, por exemplo, a descrição paramétrica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ dada por

$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \\ y = 8 \sin^3 \theta \sin^3 \varphi \\ x = 8 \cos^3 \varphi \ . \end{cases}$$

O ponto $(8, 0, 0)$ é a imagem por f de $(0, \frac{\pi}{2})$ e de $(\pi, -\frac{\pi}{2})$ (assim como de outros pontos que diferem destes por múltiplos de 2π em cada coordenada). Tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (-24 \cos^2 \theta \sin \theta \sin^3 \varphi, 24 \sin^2 \theta \cos \theta \sin^3 \varphi, 0) \ .$$

Como $\frac{\partial f}{\partial \theta}(0, \frac{\pi}{2}) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\pi, -\frac{\pi}{2}) = (0, 0, 0)$, o ponto $(8, 0, 0)$ não é regular.

(10) Sejam (t, x) as coordenadas de um vector $\mathbf{v}$ no espaço de Minkowski bidimensional. O vector $\mathbf{v}$ pertence à "circunferência" de raio $R \geq 0$ centrada na origem se e só se

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| = R \quad & \Longleftrightarrow \quad |\mathbf{v} * \mathbf{v}|^2 = R^2 \\ & \Longleftrightarrow \quad |-c^2t^2 + x^2| = R^2 \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2}{R^2} - \frac{t^2}{\frac{R^2}{c^2}} = 1 & \text{se } x^2 > c^2t^2 \\ \frac{t^2}{\frac{R^2}{c^2}} - \frac{x^2}{R^2} = 1 & \text{se } x^2 < c^2t^2 \ , \end{cases} \end{aligned}$$

onde a última equivalência só vale para $R \neq 0$. A "circunferência" de raio $R = 0$ é o conjunto dos vectores de tipo luz, dado pela união das duas rectas $x = ct$ e $x = -ct$. Uma "circunferência" de raio $R > 0$ é a união de duas hipérboles (4 ramos ao todo), uma no sector de tipo espaço (com directrizes horizontais) e outra no sector de tipo tempo (com directrizes verticais).