22 SÉCULOS A MEDIR ÁREA

MIGUEL ABREU E ANA CANNAS DA SILVA

1. O teorema favorito de Arquimedes

Das geniais descobertas e invenções de Arquimedes (287-212 AC), conta-se que a sua favorita terá sido a de que a superfície de uma esfera entre dois planos paralelos que a intersectam depende apenas da distância entre esses planos e não da altura onde intersectam a esfera [A]. Mais ainda, como se ilustra na Figura 1, o teorema de Arquimedes afirma que a área da superfície esférica é igual à de um cilindro com o raio da esfera e altura a distância entre esses planos.

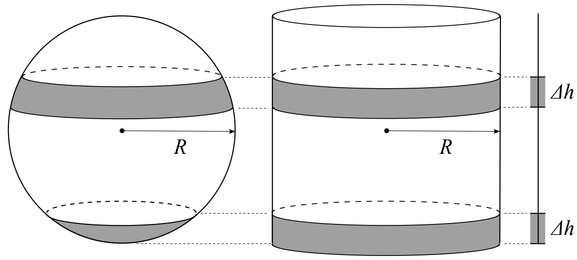

Figura 1. Faixas esféricas e cilíndricas com a mesma área.

Para a medição de área sobre uma esfera de raio R, utilizamos os ângulos θ da longitude medida a partir de um meridiano escolhido ($0 \le \theta < 2\pi$) e φ da latitude medida a partir do equador ($-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$). Um minúsculo "rectângulo" esférico com canto em longitude θ e latitude φ, como na Figura 2, tem altura um arco de circunferência de comprimento $R \cdot \Delta\varphi$ onde $\Delta\varphi$ é a diferença de latitude entre os seus lados horizontais e tem largura da base $R\cos\varphi \cdot \Delta\theta$ onde $\Delta\theta$ é a diferença de longitude entre os seus lados verticais e $R\cos\varphi$ é o raio da circunferência na latitude da sua base. A área desse "rectângulo" será aproximadamente o produto dessas duas medidas. A área de uma faixa esférica entre dois planos horizontais (com $\Delta\theta = 2\pi$ para abranger todas as longitudes), como as da Figura 1, é estimada por

$$\text{área}_{esf} \simeq 2\pi R^2 \cos\varphi \cdot \Delta\varphi \ .$$

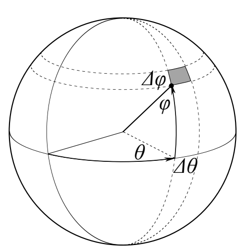

Figura 2. "Rectângulo" esférico determinado por pequenas variações de latitude e longitude.

Date: 26 de Janeiro de 2011.

Com o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT/Portugal).

Consideremos agora um cilindro de raio R. Visto como um rectângulo enrolado, a área de um segmento do cilindro com altura Δh será $2\pi R \cdot \Delta h$, onde $2\pi R$ é o comprimento da base do rectângulo. Para comparar com a área sobre a esfera, calculemos a distância Δh entre os planos horizontais contendo os paralelos dados por latitudes φ e $\varphi + \Delta\varphi$. A trigonometria mostra que

$$\Delta h = R\sin(\varphi + \Delta\varphi) - R\sin\varphi = R\sin\varphi\cos\Delta\varphi + R\cos\varphi\sin\Delta\varphi - R\sin\varphi \ .$$

Usando uma aproximação de Taylor quando $\Delta\varphi$ é quase nulo, tem-se $\cos\Delta\varphi \simeq 1$ e $\sin\Delta\varphi \simeq \Delta\varphi$ a menos de erros da ordem de $(\Delta\varphi)^2$, pelo que $\Delta h \simeq R\cos\varphi \cdot \Delta\varphi$ e obtém-se

$$\text{área}_{cil} \simeq 2\pi R^2 \cos\varphi \cdot \Delta\varphi \ .$$

Apesar das aproximações, estas estimativas conduzem a um resultado rigoroso por integração, o que conclui a demonstração do resultado de Arquimedes.

Fica bem mais simples expressar a área da banda esférica em termos da distância Δh entre os planos horizontais:

$$\text{área}_{esf} = \text{área}_{cil} = 2\pi R \cdot \Delta h \qquad !$$

Uma vez que $2\pi R$ é uma constante, constatamos que a área cresce *linearmente* com a distância vertical Δh. Para cálculo destas áreas façamos pois uso do ângulo θ e da altura h como coordenadas para descrever regiões esféricas. Chamam-se *coordenadas de acção-ângulo* [AA]. Aqui o *ângulo* θ é o da (acção de) rotação da esfera em torno do eixo vertical. Ao rodar, cada ponto descreve uma circunferência especificada por uma altura h, que é a coordenada de *acção*.

2. Coordenadas de acção-ângulo

Outro cálculo a que se podem aplicar ideias semelhantes às da secção anterior é o da área de um círculo, também estudada por Arquimedes [AC].[1] Um círculo de raio R tem área πR^2, donde se vê que a área cresce *linearmente* com R^2. Consequentemente, a área de uma coroa circular, como a da Figura 3, será $2\pi\Delta h$, onde Δh é metade da diferença dos quadrados dos raios das circunferências. Convencionamos escolher como coordenadas de acção-ângulo $\frac{1}{2}r^2$ e θ, onde θ é o ângulo a partir de um semi-eixo e r a distância ao centro ($0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r \leq R$).

Cada coordenada de ângulo, θ, funciona sempre da mesma forma, correspondendo ao ângulo total de uma circunferência. Assim, o estudo destes espaços pode-se concentrar nas coordenadas de acção. No caso do círculo, a coordenada $\frac{1}{2}r^2$ determina uma circunferência de raio r, chamada *órbita* para a rotação. Nestes termos, um segmento de recta representa um círculo − diz-se que o segmento é o *espaço das órbitas* do círculo, pois cada ponto do segmento corresponde a uma órbita/circunferência no círculo. Analogamente, uma semi-recta é o *espaço das órbitas* do plano. Para reconstruir o plano a partir da semi-recta, substitua-se cada ponto de coordenada $\frac{1}{2}r^2$ da semi-recta por uma circunferência de raio r e centro na origem. Enquanto que para um círculo ou para o plano este ponto de vista pouco parece adiantar, torna-se um truque valioso para entender espaços de dimensão 4 ou maior pois economiza metade do número de dimensões a

[1]Arquimedes considerou uma sucessão de polígonos regulares inscritos na circunferência de raio R como aproximações do círculo. Partindo o polígono de 2N lados em fatias triangulares, e arrumando essas fatias alternadamente de maneira a formar um paralelogramo, vê-se que o polígono tem área $p \cdot r$, onde p é o semi-perímetro do polígono e r é a altura do correspondente paralelogramo. À medida que N aumenta, o semi-perímetro vai-se aproximando da metade do comprimento da circunferência, πR, e a altura r aproxima-se do raio do círculo, R. Analogamente para polígonos que circunscrevem a circunferência. Como a área do círculo está entre as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos, assim se vê, no limite, que a área do círculo é πR^2.

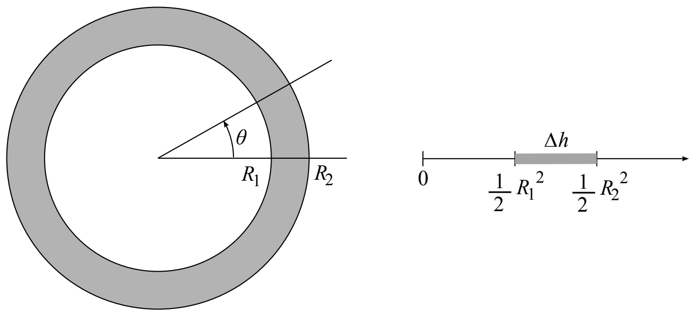

FIGURA 3. Área de uma coroa circular em coordenadas de acção-ângulo.

representar. Em qualquer dimensão, o volume de uma caixa de lados perpendiculares é o produto dos comprimentos dos lados. O volume de qualquer objecto razoável poderá ser estimado, tão precisamente quanto se queira, aproximando-o por inúmeras pequenas caixas. Esta é a ideia base da integração. Consideremos agora a bola de raio R no espaço de dimensão 4. Trata-se do conjunto de pontos com quatro coordenadas reais (x_1, x_2, x_3, x_4) que satisfazem

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 \leq R^2 \ .$$

Para representar em coordenadas de acção-ângulo, chamemos $r_1{}^2$ a $x_1{}^2 + x_2{}^2$ e chamemos $r_2{}^2$ a $x_3{}^2 + x_4{}^2$. Em cada um dos planos, (x_1, x_2) e (x_3, x_4), descrevemos os pontos em termos de metade do quadrado da distância à origem, $y_1 = \frac{1}{2}r_1{}^2$ e $y_2 = \frac{1}{2}r_2{}^2$, e de um ângulo, θ_1 e θ_2. A bola tetradimensional passa a ser codificada por um triângulo dado por $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ e $y_1 + y_2 \leq \frac{1}{2}R^2$, representado na Figura 4. O volume da bola tetradimensional é o produto da área desse triângulo pelos comprimentos 2π dos intervalos de variação de θ_1 e θ_2:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}R^2\right)^2 \cdot (2\pi)^2 \ = \ \frac{1}{2}\pi^2 R^4 \ .$$

Um triângulo no plano é simples de ver enquanto que a bola tetradimensional exige coragem e imaginação! Este fenómeno repete-se para a bola de raio R em dimensão $2n$ cujo volume, $\frac{1}{n!}\pi^n R^{2n}$, não é mais do que o produto por $(2\pi)^n$ do volume do polítopo definido por $y_1 \geq 0$, ..., $y_n \geq 0$ e $y_1 + \ldots + y_n \leq \frac{1}{2}R^2$. Além disso, uma zona desse polítopo determina uma porção da

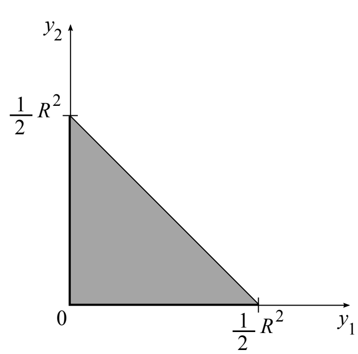

FIGURA 4. Triângulo que codifica a bola de raio R em dimensão 4.

bola cujo volume é $(2\pi)^n$ vezes o volume da zona no polítopo. Deixando o raio crescer, cobre-se deste modo todo o espaço euclideano de dimensão $2n$ em termos do octante $y_1 \geq 0$, ..., $y_n \geq 0$ no espaço n-dimensional. Assim se calcula com facilidade o volume de certos subconjuntos do espaço $2n$-dimensional correspondendo a zonas do octante com metade da dimensão.

3. Até à geometria simpléctica

Em 1982, Hans Duistermaat e Gert Heckman mostraram que o teorema de Arquimedes para a área de uma esfera era o primeiro caso de um família infinita. Em todos os espaços conhecidos por *variedades simplécticas tóricas*, dos quais a esfera é o primeiro exemplo e o único que podemos visualizar facilmente, a medida natural de volume reduz-se à medida mais simples de um polítopo no espaço euclideano, a menos de uma constante multiplicativa universal. Todos estes espaços têm a particularidade de os seus pontos poderem ser descritos por coordenadas *de acção* dadas por coordenadas cartesianas num polítopo num espaço euclideano, tal como o triângulo acima, e por coordenadas *de ângulo* dadas por ângulos em circunferências. Enquanto que as coordenadas de acção identificam a órbita a que o ponto pertence, as coordenadas de ângulo identificam o ponto dentro da sua órbita. Por cada coordenada de acção tem-se uma coordenada de ângulo.

Na verdade, a fórmula de Duistermaat e Heckman aplica-se a uma grande classe de espaços com simetrias, ditas *variedades simplécticas* com acções hamiltonianas. A esfera é o primeiro exemplo com simetria (ou acção) por rotação em torno de um eixo. As variedades simplécticas são espaços de dimensão par onde, essencialmente, se sabe medir a *área* de subespaços bidimensionais. Está relacionada com números complexos; aliás, o termo "simpléctico" foi escolhido por Hermann Weyl substituindo a raiz latina na palavra "complexo" pela correspondente raiz grega com o mesmo significado. A geometria simpléctica nasceu da mecânica clássica nos finais do século XVIII, ocupando-se do estudo do movimento dos planetas, de pêndulos e outros objectos sujeitos a forças frequentemente de origem gravítica. A trajectória de um objecto "clássico" é determinada pela sua posição, descrita por coordenadas q_i, e pela sua velocidade, ou melhor, pelo seu momento, correspondentemente descrito por coordenadas p_i. Nota-se um emparelhamento de coordenadas (q_i, p_i) típico de fenómenos simplécticos.

A geometria simpléctica sofreu uma vigorosa expansão nos últimos 50 anos, tendo-se tornado uma nova área central da geometria. Esta expansão foi estimulada por importantes interacções com variadíssimas áreas da matemática e da física. Em particular, as coordenadas de acção-ângulo têm sido usadas para explorar novos territórios em busca de espaços e de estruturas com propriedades especiais relevantes para investigação da mais moderna. Imaginaria Arquimedes que, mais de dois milénios depois, o seu espírito continuaria a inspirar matemática nova?

Referências

[A] Biografia de Arquimedes, `http://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes`.
[AA] Coordenadas de acção-ângulo, `http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/pt/Action-angle_coordinates`.
[AC] Área de um círculo, `http://pt.wikipedia.org/wiki/Círculo`.

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, 1049-001 Lisboa, Portugal e Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ 08544-1000, USA

E-mail address: mabreu@math.ist.utl.pt, acannas@math.ist.utl.pt