Введение

Изучение сингулярных интегральных операторов (СИО) с кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах Лебега со степенным весом на ляпуновских кривых было начато Б.В.Хведелидзе. Некоторую завершенность теория Нетера для банаховых алгебр, порожденных такими операторами, приобрела в работах И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника начала 70-х годов [3, 4, 5]. Они рассматривали СИО вида

$$R_G = GP_+ + P_-,$$

где $P_\pm = (I \pm S)/2, I$ - тождественный оператор, S - оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши, G - кусочно непрерывная функция. Они доказали, что существенный спектр оператора R_G состоит из образа функции G, дополненного в точках разрыва дугами окружностей.

В начале 90-х годов завершился период экстенсивного развития теории Нетера для СИО с кусочно непрерывными коэффициентами. В 1990 г. И.М.Спитковский [39] обнаружил новый эффект для оператора R_G в пространстве Лебега с весом Макенхаупта на гладких кривых – появление "массивного" существенного спектра В этом случае он состоит из образа функции G, который дополняется в точках разрыва рожками (луночками), которые могут иметь ненулевую плоскую меру и зависят от веса.

Аналогичный эффект обнаружен автором [8] в случае рефлексивных пространств Орлича на гладких кривых. В этом случае дополняющие рожки определяются при помощи интерполяционных характеристик пространств Орлича – индексов Бойда.

В 1994 г. А.Беттчер и Ю.И.Карлович [23] обнаружили еще один новый эффект для весовых пространств Лебега: перевоплощение дуг окружностей и рожков в спирали и спиралевидные рожки при переходе от гладких к карлесоновским кривым с логарифмическим характером закручивания, то есть существенный спектр оператора R_G наследует свойства кривой.

С другой стороны, в 1992 г. Т.Финк, С.Рох, Б.Зильберманн [33] и независимо от них И.Ц.Гохберг и Н.Я.Крупник [34] получили теорему "о двух проекторах", которая вместе с локальным принципом Аллана-Дугласа представляет собой мощный инструмент для исследования банаховых алгебр, порожденных операторами с массивными существенными спектрами.

В настоящей работе исследуется банахова алгебра, порожденная СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном пространстве Орлича. Работа состоит из введения и шести параграфов. В первом параграфе вводятся пространства Орлича и приводятся необходимые сведения об интерполяции линейных операторов в них. Во втором параграфе получены необходимые и достаточные условия на кривую, гарантирующие ограниченность оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши в рефлексивном пространстве Орлича (кривая должна быть карлесоновской). В третьем параграфе получен критерий нетеровости оператора R_G в терминах факторизации функции $G \in L_\infty$. В четвертом параграфе получены достаточные условия факторизации степенной функции на замкнутой карлесоновской кривой с логарифмическим характером закручивания, а также необходимые условия факторизации степенной функции на замкнутой гладкой кривой. В пятом параграфе с применением локального принципа Гохберга-Крупника получен критерий нетеровости оператора R_G с кусочно непрерывным коэффициентом G в рефлексивном пространстве Орлича с совпадающими индексами Бойда на замкнутой карлесоновской кривой с логарифмическим характером закручивания и в рефлексивном пространстве Орлича с произвольными индексами Бойда на гладкой кривой. В предположениях предыдущего параграфа в шестом параграфе с помощью локального принципа Аллана-Дугласа и теоремы о двух проекторах построено символьное исчисление для банаховой алгебры СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами и доказан критерий нетеровости для оператора из этой алгебры в терминах его символа.

Полученные результаты докладывались автором 1) на семинаре по функциональному анализу и теории операторов в Техническом университете Хемниц-Цвиккау, руководитель – проф. Б.Зильберманн (Хемниц, ФРГ, январь, ноябрь 1994 г.); 2) на семинаре по теории операторов в Высшем техническом институте Лиссабона (Лиссабон, Португалия, июль 1994 г.); 3) на семинаре по теории сингулярных интегральных уравнений в Одесском государственном университете, руководитель – д.ф.-м.н. Диденко В.Д (Одесса, март 1995 г.); 4) на семинаре по теории функций в Одесском государственном университете, руководитель – проф. Стороженко Э.А. (Одесса, март 1995 г.); 5) на II конференции "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" (Киев, май 1995 г.).

1. Пространства Орлича и интерполяция

1.1. Пространства Орлича

Основные свойства пространств Орлича обсуждаются, например, в [11, 22].

Функцией Юнга называется четная выпуклая непрерывная функция $M : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, для которой $M(0) = 0, M(x) > 0$ для $x \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{M(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{M(x)} = 0.$$

Дополнительной к функции M называется функция Юнга

$$N(x) := \sup_{y\geq 0}\{y|x| - M(y)\}.$$

Говорят, что функция M удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют постоянные $c > 0,\ x_0 \geq 0$ для которых $M(2x) \leq cM(x)$ при $x \geq x_0$.

Пусть Ω - ограниченное измеримое множество конечномерного евклидова пространства с мерой Лебега. Обозначим $L^0_M(\Omega)$ класс Орлича - множество комплекснозначных функций u, измеримых на Ω и удовлетворяющих условию

$$\int_\Omega M(|u(x)|)dx < \infty.$$

Замыкание линейной оболочки класса Орлича, снабженное нормой

$$\|u\|_M := \inf_{\lambda>0}\left\{\lambda : \int_\Omega M\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)dx \le 1\right\}$$

является банаховым пространством, которое называется пространством Орлича. Пространство Лебега $L_p(\Omega), 1 < p < \infty$ изоморфно пространству Орлича $L_M(\Omega)$ с функцией Юнга $M(x) = |x|^p/p$.

Лемма 1.1. *([11, §§9.5, 14.2]) Если функция Юнга M удовлетворяет Δ_2-условию, то*
(a) $L_M^0(\Omega) = L_M(\Omega)$;
(b) $(L_M(\Omega))^* = L_N(\Omega)$. Общий вид линейного функционала на $L_M(\Omega)$ задается формулой

$$l(u) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

1.2. Индексы Бойда

Пространства Орлича являются представителями широкого класса перестановочно инвариантных (симметричных) пространств (см. [12, 22, 38]). Интерполяционными и геометрическими характеристиками перестановочно инвариантных пространств являются индексы Бойда.

Положительная всюду конечная на $(0, +\infty)$ функция φ называется полумультипликативной, если выполняется неравенство $\varphi(st) \le \varphi(s)\varphi(t)$ для всех $s, t \in (0, +\infty)$. Согласно теореме 1.3 гл. 2 [12] для каждой полумультипликативной функции φ существуют конечные числа

$$\alpha(\varphi) = \lim_{t\to+\infty}\Theta(t) = \sup_{t>1}\Theta(t), \quad \beta(\varphi) = \lim_{t\to 0+}\Theta(t) = \inf_{0<t<1}\Theta(t),$$

где $\Theta(t) = -\log\varphi(t)/\log t$.

Пусть функция f измерима и почти всюду конечна на $[0, |\Omega|)$. Определим оператор растяжения

$$(E_t f)(s) = \begin{cases} f(st), & 0 < st < |\Omega| \\ 0, & |\Omega| \le st. \end{cases}$$

Будем обозначать f^* – невозрастающую перестановку функции f, определенной на Ω (см., например, [12, 22, 38]). Пусть $L_M(\Omega^*)$ – представление Люксембурга для пространства $L_M(\Omega)$ (см. [22, гл. 2, §4]).

Рассмотрим полумультипликативные функции

$$
\begin{aligned}
g(t; L_M(\Omega)) &= \|E_t\|_{\mathcal{L}(L_M(\Omega^*))}, \quad t>0, && (1.1)\\
h(t; M) &= \limsup_{x\to\infty} \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t>0, && (1.2)
\end{aligned}
$$

где M^{-1} - функция, обратная к сужению M на $[0,+\infty)$.

Бойд показал [28] (см. также [22, с. 277]), что

$$
\alpha_M := \alpha(g) = \alpha(h), \quad \beta_M := \beta(g) = \beta(h). \tag{1.3}
$$

Лемма 1.2. *(см. [27, лемма 5],[22, с. 149],[38, с. 131])*
(a) $0 \le \alpha_M \le \beta_M \le 1$ *;*
(b) $\alpha_N = 1-\beta_M, \quad \beta_N = 1-\alpha_M$.

Число $\alpha_M(\beta_M)$ будем называть нижним (верхним) индексом Бойда пространства Орлича $L_M(\Omega)$.

В теории перестановочно инвариантных пространств важную роль играют взвешенные операторы усреднения (см. [22, с. 150]):

$$
\begin{aligned}
(P_a f)(t) &= t^{-a}\int_0^t s^a f(s)\frac{ds}{s}, \quad 0<t<\mu, \quad a>0; && (1.4)\\
(Q_a f)(t) &= t^{-a}\int_t^\mu s^a f(s)\frac{ds}{s}, \quad 0<t<\mu, \quad a<1, && (1.5)
\end{aligned}
$$

где $\mu = |\Omega|$ – мера Ω.

Заметим, что оператор Q_b является формально сопряженным к P_a, если $a+b=1$, то есть

$$
\int_0^\mu (P_a f)(t) g(t)dt = \int_0^\mu f(t)(Q_b g)(t)dt \tag{1.6}
$$

для всех f и g таких, что интегралы существуют.

Лемма 1.3. *Пусть $\Omega_1 \subset \Omega, |\Omega_1|>0$. Если оператор $P_a (a>0)$ ограничен в $L_M(\Omega_1^*)$, то $\beta_M \le a$. Если оператор $Q_a(a<1)$ ограничен в $L_M(\Omega_1^*)$, то $a \le \alpha_M$.*

Доказательство. Доказательство проведем по аналогии с теоремой 5.15 [22, гл. 3]. Пусть $f \in L_M(\Omega_1^*), g \in L_N(\Omega_1^*)$ такие, что

$$
\|f\|_{L_M(\Omega_1^*)} \le 1, \quad \|g\|_{L_N(\Omega_1^*)} \le 1. \tag{1.7}
$$

Функция $\int_0^\mu f^*(s/t)g^*(s)ds$ невозрастает по t и для каждого $t>1$ имеем

$$
\int_0^\mu f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s)ds = at^a \left(\int_0^\mu f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s)ds\right)\left(\int_0^{1/t} u^{a-1}du\right) =
$$

$$
at^a \int_0^{1/t}\left(\int_0^\mu f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s)ds\right) u^{a-1}du \le at^a\int_0^{1/t}\left(\int_0^\mu f^*(su)g^*(s)ds\right)u^{a-1}du =
$$

$$
\begin{aligned}
at^a\int_0^\mu\left(\int_0^{1/t} f^*(su)u^{a-1}du\right)g^*(s)ds &\leq at^a\int_0^\mu\left(\int_0^1 f^*(su)u^a\frac{du}{u}\right)g^*(s)ds = \\
at^a\int_0^\mu\left(\int_0^s f^*(x)\left(\frac{x}{s}\right)^a\frac{dx}{x}\right)g^*(s)ds &= at^a\int_0^\mu\left(P_af^*\right)(s)g^*(s)ds \\
&\leq at^a\|P_a\|_{\mathcal{L}(L_M(\Omega_1^*))}.
\end{aligned}
$$

Переходя в полученном неравенстве к верхней грани по всем f и g, удовлетворяющим (1.7), получим

$$
g(1/t;L_M(\Omega_1)) = \|E_t\|_{\mathcal{L}(L_M(\Omega_1^*))} \leq at^a\|P_a\|_{\mathcal{L}(L_M(\Omega_1^*))}, \quad t>1.
$$

Отсюда

$$
-\frac{\log g(1/t;L_M(\Omega_1))}{\log 1/t} \leq a + \frac{\log(a\|P_a\|_{\mathcal{L}(L_M(\Omega_1^*))})}{\log t}, \quad t>1.
$$

Переходя к пределу при $t\to+\infty$, получим $\beta(g(t;L_M(\Omega_1))\leq a$. Тогда из (1.2) и (1.3) вытекает, что $\beta_M\leq a$.

Из (1.6) следует, что $Q_a(a<1)$ ограничен в $L_M(\Omega_1^*)$ тогда и только тогда, когда P_{1-a} ограничен в $L_N(\Omega_1^*)$. По только что доказанному $1-a\geq\beta_N$. Из леммы 1.2 (b) следует, что $a\leq\alpha_M$. ■

Теорема 1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(a) пространство Орлича $L_M(\Omega)$ рефлексивно;
(b) взаимно дополнительные функции Юнга M и N удовлетворяют Δ_2-условию;
(c) индексы Бойда удовлетворяют неравенствам

$$
0< \ \alpha_M \ \leq \ \beta_M \ <1.
$$

Доказательство. Эквивалентность первого и второго утверждений хорошо известна [11, с. 225]. Аналогично лемме 5.9 [26], можно доказать, что функция Юнга M удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда $\alpha_M>0$. Отсюда и из леммы 1.2 (b) следует, что утверждения (b) и (c) эквивалентны. ■

Теорема 1.2. *Для любых p и q таких, что*

$$
1\leq q<1/\beta_M\leq 1/\alpha_M<p\leq\infty,
$$

имеют место вложения

$$
L_p(\Omega)\subset L_M(\Omega)\subset L_q(\Omega).
$$

Эта теорема вытекает из теоремы вложения для перестановочно инвариантных пространств [38, с. 132].

1.3. Интерполяционные теоремы

Теорема 1.3. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Если линейный оператор* A *ограничен в пространствах Лебега* $L_p(\Omega)$ *и* $L_q(\Omega)$, *то он ограничен в пространстве Орлича* $L_M(\Omega)$ *с индексами Бойда, удовлетворяющими неравенствам*

$$1/p < \alpha_M \le \beta_M < 1/q.$$

Эта теорема доказана Бойдом [25] (см. также [27], [22, с. 153]) для перестановочно инвариантных пространств. Она может быть получена из результатов Густавссона и Петре [36, теор. 7.3] (см. [7, 10], где рассматривается случай $\Omega = \mathbb{R}^n$).

Теорема 1.4. *Пусть* $L_M(\Omega)$ *- рефлексивное пространство Орлича,* $L_N(\Omega)$ *- сопряженное к нему пространство. Если линейный оператор* A *ограничен в пространствах* $L_M(\Omega)$ *и* $L_N(\Omega)$, *то он ограничен в пространстве Лебега* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Согласно результатам Кальдерона [29], пространство $L_{M_1}^{1-\Theta} L_{M_2}^{\Theta}$ $(0 \le \Theta \le 1)$, построенное комплексным методом интерполяции по пространствам Орлича $L_{M_1}(\Omega)$ и $L_{M_2}(\Omega)$, является пространством Орлича $L_{M_\Theta}(\Omega)$, где функция Юнга M_Θ определяется формулой $M_\Theta^{-1} = (M_1^{-1})^{1-\Theta}(M_2^{-1})^{\Theta}$. Полагая $M_1 = M, M_2 = N, \Theta = 1/2$, мы получим

$$M_{1/2}^{-1}(t) = \sqrt{M^{-1}(t)N^{-1}(t)}, \quad t \ge 0.$$

С другой стороны,

$$t \le M^{-1}(t)N^{-1}(t) \le 2t, \quad t \ge 0$$

(см. [11], неравенство (2.10)). Следовательно, функция Юнга $\Psi(t) := M_{1/2}(t)$ эквивалентна t^2. По теореме 13.2 [11] пространство Орлича $L_\Psi(\Omega)$ изоморфно пространству Лебега $L_2(\Omega)$ и нормы в этих пространствах эквивалентны. Таким образом, мы можем рассматривать $L_2(\Omega)$ как интерполяционное пространство между $L_M(\Omega)$ и $L_N(\Omega)$, т.е. из ограниченности оператора в пространстах $L_M(\Omega)$ и $L_N(\Omega)$ вытекает его ограниченность в $L_2(\Omega)$. ■

Заметим, что этот результат также может быть получен из теоремы 7.3 [36].

Ограниченный линейный оператор A, действующий в банаховом пространстве X, называется полунетеровым, если его образ $Im\,A$ замкнут в X и одно из дефектных чисел

$$n(A) := \dim \mathrm{Ker} A, \quad d(A) := \dim \mathrm{Ker} A^*$$

конечно. Полунетеров оператор называется нетеровым, если оба дефектных числа конечны. В этом случае индексом оператора A называется число

$$Ind\,A := n(A) - d(A).$$

Основные свойства нетеровых операторов обсуждаются в [24, 5], а также во многих других монографиях.

Теорема 1.5. *Пусть $L_M(\Omega)$ - рефлексивное пространство Орлича с индексами Бойда α_M, β_M. Пусть оператор A ограничен во всех пространствах Лебега $L_p(\Omega)$, где $1/p \in (\alpha_M - \delta, \beta_M + \delta)$ и $\delta > 0$. Если оператор A нетеров во всех пространствах $L_p(\Omega)$, где $1/p \in [\alpha_M, \beta_M]$, то оператор A нетеров в $L_M(\Omega)$ и*

$$Ind\, A|L_M(\Omega) = Ind\, A|L_p(\Omega) \quad \text{где} \quad 1/p \in [\alpha_M, \beta_M].$$

Доказательство. Согласно теореме 1.3 оператор A ограничен в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Omega)$. По теореме 3 [19] (см. еще [20]), существует ε такое, что $0 < \varepsilon < 1/(\alpha_M - \delta) - 1/\alpha_M$ и оператор A нетеров во всех пространствах $L_p(\Omega)$, где $p \in [1/\beta_M - \varepsilon, 1/\alpha_M + \varepsilon]$. Более того, индексы A во всех этих пространствах совпадают. По теореме 1.2 $L_{1/\alpha_M+\varepsilon}(\Omega) \subset L_M(\Omega) \subset L_{1/\beta_M-\varepsilon}(\Omega)$. Так как $L_{1/\alpha_M+\varepsilon}(\Omega)$ плотно в $L_{1/\beta_M-\varepsilon}(\Omega)$, то из [37] мы получаем, что оператор A нетеров в $L_M(\Omega)$ и

$$Ind\, A|L_M(\Omega) = Ind\, A|L_{1/\beta_M-\varepsilon}(\Omega) = Ind\, A|L_{1/\alpha_M+\varepsilon}(\Omega).\blacksquare$$

2. Сингулярный интегральный оператор с ядром Коши на карлесоновских кривых

2.1. Карлесоновские кривые

Пусть Γ - замкнутая спрямляемая жорданова кривая, делящая комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области $D^+(\ni 0)$ и $D^-(\ni \infty)$. Пусть $R(\Gamma)$ - множество всех рациональных функций, не имеющих полюсов на Γ.

Лемма 2.1. *Если $L_M(\Gamma)$ - рефлексивное пространство Орлича, то $R(\Gamma)$ плотно в $L_M(\Gamma)$.*

Доказательство. Если $L_M(\Gamma)$ - рефлексивное пространство Орлича, то $C(\Gamma)$ плотно в $L_M(\Gamma)$ [11, p. 99]. По теореме Мергеляна (см., например, [13, с. 105]) каждая функция из $C(\Gamma)$ может быть равномерно приближена функциями из $R(\Gamma)$, следовательно, $R(\Gamma)$ плотно в $L_M(\Gamma)$. $\blacksquare$

Пусть $t \in \Gamma$ и $\varepsilon > 0$, обозначим $\Gamma(t, \varepsilon) = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - t| < \varepsilon\}$ - порцию кривой Γ в открытом круге радиуса ε с центром в точке t. Будем обозначать $|\Gamma(t, \varepsilon)|$ длину (меру Лебега) порции $\Gamma(t, \varepsilon)$. Кривая Γ называется карлесоновской (регулярной в смысле Альфорса-Давида) если

$$C_\Gamma := \sup_{t\in\Gamma} \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon} |\Gamma(t, \varepsilon)| < \infty.$$

Мы будем рассматривать только жордановы (т.е. не имеющие точек самопересечения) карлесоновские кривые.

Зафиксируем точку $t \in \Gamma$, тогда $\tau - t = |\tau - t| e^{i \arg(\tau - t)}$ для $\tau \in \Gamma \backslash \{t\}$, и аргумент $\arg(\tau - t)$ может быть выбран так, чтобы он был непрерывной функцией на $\Gamma\backslash\{t\}$. Сейфуллаев [16, лемма 3] показал, что для произвольной карлесоновской кривой справедлива оценка

$$\arg(\tau - t) = O(-\log|\tau - t|), \quad \tau \to t.$$

Следуя [23], мы докажем наши основные результаты при более жестком ограничении на кривую:

$$\arg(\tau - t) = -\delta(t)\log|\tau - t| + O(1), \quad \tau \to t, \tag{2.1}$$

где $\delta : \Gamma \to \mathbb{R}$. Отметим, что в случае кусочно гладких кривых и кривых с точками возврата (заострения) $\delta(t) = 0$ для всех $t \in \Gamma$. Если для некоторой точки $t \in \Gamma$ (2.1) выполняется при $\delta(t) \neq 0$, то точка t называется точкой логарифмического закручивания.

2.2. Сингулярный интегральный оператор с ядром Коши

Предположим, что Γ - замкнутая спрямляемая жорданова кривая. Сингулярным интегралом с ядром Коши функции $\varphi \in L_1(\Gamma)$ называется

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\backslash\Gamma(t,\varepsilon)} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma.$$

Выясним вопрос об ограниченности в рефлексивном пространстве Орлича оператора S, порожденного сингулярным интегралом с ядром Коши.

Лемма 2.2. *([1, лемма 4]). Пусть $\varphi, \psi \in R(\Gamma)$, тогда*

$$(S^2\varphi)(t) = \varphi(t) \tag{2.2}$$

$$\int_\Gamma \psi(t)(S\varphi)(t)dt = -\int_\Gamma \varphi(t)(S\psi)(t)dt. \tag{2.3}$$

Лемма 2.3. *Если оператор S ограничен в рефлексивном пространстве Орлича, то $S^2 = I$, где I - единичный оператор.*

Это утверждение непосредственно следует из лемм 2.1 и 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть оператор S ограничен в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$. Тогда оператор S^*, сопряженный к оператору S, связан с оператором S в пространстве $L_N(\Gamma)$ следующим равенством*

$$S^* = -H_\Gamma S H_\Gamma,$$

где H_Γ - оператор, определенный в пространстве $L_N(\Gamma)$ формулой

$$(H_\Gamma\varphi)(t) := \overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}, \tag{2.4}$$

где $h_\Gamma(t) := exp(i\Theta_\Gamma(t))$ и $\Theta_\Gamma(t)$ - угол между касательной к кривой Γ в точке t и положительным направлением действительной оси.

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in R(\Gamma)$, тогда из равенства (2.3) и леммы 1.1 (b) вытекает

$$(\varphi, S^*\psi) = (S\varphi, \psi) = \int_\Gamma (S\varphi)(t)\overline{\psi(t)}|dt| = \int_\Gamma (S\varphi)(t)\overline{\psi(t)h_\Gamma(t)}dt =$$
$$-\int_\Gamma \varphi(t)(S\overline{\psi h_\Gamma})(t)dt = -\int_\Gamma \varphi(t)\overline{(H_\Gamma S H_\Gamma \psi)(t)}|dt| = -(\varphi, H_\Gamma S H_\Gamma \psi).$$

Тогда по лемме 2.1, $S^* = -H_\Gamma S H_\Gamma$. ■

Задача об ограниченности сингулярного интегрального оператора с ядром Коши в пространствах Лебега была полностью решена Давидом [31, 32]:

Теорема 2.1. *Оператор S ограничен в пространстве Лебега $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда Γ - карлесоновская кривая.*

Ограниченность сингулярного интегрального оператора с ядром Коши в пространствах Орлича и перестановочно инвариантных пространствах исследовалась многими авторами. В [26] (см. также [22, с. 154]) было доказано, что оператор S ограничен в перестановочно инвариантном пространстве на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его индексы Бойда принадлежат интервалу $(0, 1)$ (в случае пространства Орлича это условие эквивалентно рефлексивности). Для замкнутой ляпуновской кривой эквивалентность ограниченности S и рефлексивности пространства Орлича была доказана Яохуа [40]. Необходимое и достаточное условие на вес, гарантирующее ограниченность S в весовом рефлексивном пространстве Орлича на карлесоновских кривых найдено В.М.Кокилашвили [9]. Следующая теорема характеризует кривые Γ, для которых оператор S ограничен в $L_M(\Gamma)$.

Теорема 2.2. *Оператор S ограничен в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда Γ - карлесоновская кривая.*

Доказательство. Пусть оператор S ограничен в $L_M(\Gamma)$. Тогда оператор S^* ограничен в $L_N(\Gamma)$, по лемме 2.4 оператор S также ограничен в $L_N(\Gamma)$. Следовательно, по теореме 1.4 оператор S ограничен в $L_2(\Gamma)$. По теореме 2.1 Γ является карлесоновской кривой.

Обратно, пусть Γ - карлесоновская кривая, тогда по теореме 2.1 оператор S ограничен во всех пространствах Лебега $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$. Следовательно, по теореме 1.3 оператор S ограничен в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$. ■

2.3. Проекторы, связанные с оператором сингулярного интегрирования

Пусть Γ - замкнутая карлесоновская кривая и пусть $L_M(\Gamma)$ - рефлексивное пространство Орлича. По лемме 2.3 операторы $P_\pm := (I \pm S)/2$ являются ограниченными проекторами в $L_M(\Gamma)$. Определим следующие подпространства:

$$L_M^+(\Gamma) := P_+ L_M(\Gamma), \quad \overset{\circ}{L}{}_M^- (\Gamma) := P_- L_M(\Gamma), \quad L_M^-(\Gamma) := \overset{\circ}{L}{}_M^- (\Gamma) \dotplus \mathbb{C}.$$

Очевидно, что

$$L_M(\Gamma) = L_M^+(\Gamma) \dot{+} \overset{\circ}{L_M^-}(\Gamma), \quad L_M^+(\Gamma) \cap \overset{\circ}{L_M^-}(\Gamma) = \{0\}.$$

Так же, как в случае пространств Лебега на ляпуновских кривых (см. [5], гл. 2, §4), можно доказать, что

$$\begin{aligned} L_M^+(\Gamma) &= \left\{ f \in L_M(\Gamma) : \int_\Gamma f(t) t^n dt = 0 \text{ при } n \geq 0 \right\}, \\ \overset{\circ}{L_M^-}(\Gamma) &= \left\{ f \in L_M(\Gamma) : \int_\Gamma f(t) t^{-n} dt = 0 \text{ при } n \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} L_1^+(\Gamma) &:= \left\{ f \in L_1(\Gamma) : \int_\Gamma f(t) t^n dt = 0 \text{ при } n \geq 0 \right\}, \\ \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma) &:= \left\{ f \in L_1(\Gamma) : \int_\Gamma f(t) t^{-n} dt = 0 \text{ при } n \geq 1 \right\}, \\ L_1^-(\Gamma) &:= \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma) \dot{+} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Лемма 2.5. *[15, с. 202-206]*

$$L_1^+(\Gamma) \cap \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma) = \{0\}, \quad L_1^+(\Gamma) \cap L_1^-(\Gamma) = \mathbb{C}.$$

Лемма 2.6. *(a) Если $f \in L_M^-(\Gamma), g \in \overset{\circ}{L_N^-}(\Gamma)$, то $fg \in \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma)$;*
(b) если $f \in L_M^-(\Gamma), g \in L_N^-(\Gamma)$, то $fg \in L_1^-(\Gamma)$;
(c) если $f \in L_M^+(\Gamma), g \in L_N^+(\Gamma)$, то $fg \in L_1^+(\Gamma)$.

Доказательство. Если $f \in L_M(\Gamma), g \in L_N(\Gamma)$, то применяя неравенсто Гельдера [11, теор. 9.3], получим $fg \in L_1(\Gamma)$.

Пусть $R^\pm(\Gamma)$ - множество всех рациональных функций с полюсами в $D^\mp$, пусть $R_0^-(\Gamma)$ - множество функций из $R^-(\Gamma)$, исчезающих в бесконечности. Если $f \in L_M^-(\Gamma), g \in \overset{\circ}{L_N^-}(\Gamma)$, то согласно лемме 2.1, мы можем приблизить функцию f в пространстве $L_M(\Gamma)$ и функцию g в пространстве $L_N(\Gamma)$ рациональными функциями $f_k \in R^-(\Gamma)$ и $g_k \in R_0^-(\Gamma)$, соответственно. Очевидно, что $f_k g_k \in R_0^-(\Gamma)$. По теореме Коши

$$\int_\Gamma f_k(t) g_k(t) t^{-n} dt = 0 \quad \text{при } n \geq 1.$$

Следовательно,

$$\int_\Gamma f(t) g(t) t^{-n} dt = 0 \quad \text{при } n \geq 1,$$

то есть, $fg \in \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma)$.

Доказательство утверждений (b) и (c) проводится аналогично. ■

3. Сингулярные интегральные операторы с ограниченными измеримыми коэффициентами

3.1. Общие теоремы

Пусть Γ - замкнутая карлесоновская кривая и $L_M(\Gamma)$ - рефлексивное пространство Орлича. В этом параграфе мы будем исследовать условия нетеровости сингулярного интегрального оператора (СИО) R_G, определенного в пространстве $L_M(\Gamma)$ формулой

$$R_G = GP_+ + P_-,$$

где $G \in L_\infty(\Gamma)$.

Обозначим $GL_\infty(\Gamma)$ множество всех обратимых в $L_\infty(\Gamma)$ функций, то есть функций $a \in L_\infty(\Gamma)$, для которых

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0.$$

Теорема 3.1. *Пусть $G \in L_\infty(\Gamma)$. Если оператор R_G полунетеров, то $G \in GL_\infty(\Gamma)$.*

Теорема 3.2. *Если $\in GL_\infty(\Gamma)$, то $\min\{n(R_G), d(R_G)\} = 0$.*

В случае пространств Лебега теорема 3.1 доказана И.Б.Симоненко [18], теорема 3.2 получена Л.Кобурном [30]. Для пространств Лебега со степенным весом доказательства даны в [5], гл. 7, §4-5.

В нашем случае теоремы 3.1 и 3.2 доказываются аналогично (заметим, что $L_M(\Gamma) \subset L_1(\Gamma)$, потому мы можем применять теорему Лузина-Привалова [15, с.292]).

Лемма 3.1. *Пусть $G \in GL_\infty(\Gamma)$. Если оператор R_G обратим в $L_M(\Gamma)$, то оператор $R_{G^{-1}}$ обратим в $L_N(\Gamma)$.*

Доказательство. Если оператор R_G обратим в $L_M(\Gamma)$, то оператор R_G^* обратим в $L_N(\Gamma)$. По лемме 2.4 $P_\pm^* = H_\Gamma P_\mp H_\Gamma$, где H_Γ - обратимый оператор, определяемый формулой (2.4). Следовательно,

$$R_G^* = H_\Gamma(P_+ + P_- GI)H_\Gamma.$$

Тогда оператор $P_+ + P_-GI$ обратим в пространстве $L_N(\Gamma)$. Далее,

$$P_+ + P_-GI = D_1 R_{G^{-1}} D_2 GI,$$

где операторы

$$D_1 := I + P_+G^{-1}P_-, \quad D_2 := I - P_-G^{-1}P_+$$

обратимы,

$$D_1^{-1} = I - P_+G^{-1}P_-, \quad D_2^{-1} = I + P_-G^{-1}P_+.$$

Таким образом, оператор

$$R_{G^{-1}} = D_1^{-1}(P_+ + P_-GI)G^{-1}D_2^{-1}$$

обратим в $L_N(\Gamma)$. ■

3.2. СИО с непрерывными коэффициентами

Обозначим $C(\Gamma)$ - C^*-алгебру всех непрерывных на Γ функций.

Лемма 3.2. *Пусть $a \in C(\Gamma)$. Тогда оператор $aS - SaI$ компактен в $L_M(\Gamma)$.*

Теорема 3.3. *Пусть $G \in C(\Gamma)$. Оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $G(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. В этом случае*

$$Ind\, R_G = -\frac{1}{2\pi}\left\{Arg\, G(t)\right\}_\Gamma .$$

Так как справедлива лемма 2.1, то эти утверждения могут быть доказаны так же, как и в случае пространств Лебега на ляпуновских кривых (см. [5], гл. 1, теор. 4.3 и гл. 3, теор. 7.1). Отметим, что в случае пространств Орлича на ляпуновских кривых эти результаты получены в [41].

3.3. Факторизация в рефлексивных пространствах Орлича

Будем говорить, что функция $G \in L_\infty(\Gamma)$ допускает факторизацию в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$, если

$$G(t) = G_-(t) t^\kappa G_+(t), \quad t \in \Gamma, \tag{3.1}$$

где κ - целое число, а функции $G_\pm$ обладают следующими свойствами:

$$(i) \quad G_- \in L_M^-(\Gamma), \quad G_+ \in L_N^+(\Gamma), \quad G_-^{-1} \in L_N^-(\Gamma), \quad G_+^{-1} \in L_M^+(\Gamma),$$

где N - функция Юнга, дополнительная к M,

$$(ii) \quad \text{оператор} \quad G_+^{-1} P_+ G_-^{-1} I \quad \text{ограничен в} \quad L_M(\Gamma).$$

Можно доказать, что число κ определяется единственным образом. Так же, как в случае пространств Лебега [5, гл. 8], будем называть это число индексом функции $G \in L_\infty(\Gamma)$ и обозначать его $ind\, G|L_M(\Gamma)$.

Теорема 3.4. *Пусть Γ - замкнутая карлесоновская кривая, $L_M(\Gamma)$ - рефлексивное пространство Орлича. Функция $G \in L_\infty(\Gamma)$ допускает факторизацию в $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$. Если R_G нетеров, то*

$$ind\, G|L_M(\Gamma) = -Ind\, R_G|L_M(\Gamma).$$

В случае пространств Лебега эта теорема была доказана И.Б.Симоненко [18]. Мы используем схему доказательства из [5, гл. 8, §3].

Доказательство. *Необходимость.* Предположим сначала, что функция G допускает факторизацию $G = G_- G_+$ и ее индекс $ind\, G|L_M(\Gamma) = 0$. По определению факторизации

$$G_- \in L_M^-(\Gamma), \quad G_+ \in L_N^+(\Gamma), \quad G_-^{-1} \in L_N^-(\Gamma), \quad G_+^{-1} \in L_M^+(\Gamma).$$

Если $r \in R(\Gamma)$, то $G_-^{-1}r \in L_N(\Gamma)$. Следовательно, $P_+G_-^{-1}r \in L_N^+(\Gamma), P_-G_-^{-1}r \in \overset{\circ}{L_N^-}(\Gamma)$. По лемме 2.6

$$G_+^{-1}P_+G_-^{-1}r \in L_1^+(\Gamma), \quad G_-P_-G_-^{-1}r \in \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma).$$

Из определения факторизации следует, что операторы

$$G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I \quad \text{и} \quad G_-P_-G_-^{-1}I = I - GG_+^{-1}P_+G_-^{-1}I$$

ограничены в $L_M(\Gamma)$. Следовательно, $G_+^{-1}P_+G_-^{-1}r$ и $G_-P_-G_-^{-1}r$ принадлежат $L_M(\Gamma)$. Так как $L_M^+(\Gamma) = L_M(\Gamma) \cap L_1^+(\Gamma)$ и $\overset{\circ}{L_M^-}(\Gamma) = L_M(\Gamma) \cap \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma)$, то

$$G_+^{-1}P_+G_-^{-1}r \in L_M^+(\Gamma), \quad G_-P_-G_-^{-1}r \in \overset{\circ}{L_M^-}(\Gamma).$$

Рассмотрим ограниченный оператор

$$B := (G_+^{-1}P_+ + G_-P_-)G_-^{-1}I = I + (1-G)G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} R_G Br &= (GP_+ + P_-)(G_+^{-1}P_+ + G_-P_-)G_-^{-1}r \\ &= GG_+^{-1}P_+G_-^{-1}r + G_-P_-G_-^{-1}r = r. \end{aligned}$$

Аналогично, так как $G_+P_+r \in L_N^+(\Gamma), G_-^{-1}P_-r \in \overset{\circ}{L_N^-}(\Gamma)$, то $BR_Gr = r$.

Так как B ограничен в $L_M(\Gamma)$ и $R(\Gamma)$ плотно в $L_M(\Gamma)$, то оператор R_G обратим в $L_M(\Gamma), R_G^{-1} = B$. Следовательно, $Ind\, R_G|L_M(\Gamma) = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай, где κ - произвольное целое число. Тогда функция $Gt^{-\kappa}$ допускает факторизацию $Gt^{-\kappa} = G_-G_+$, по только что доказанному оператор $Gt^{-\kappa}P_+ + P_-$ обратим в $L_M(\Gamma)$.

Если $\kappa > 0$, то

$$R_G = (Gt^{-\kappa}P_+ + P_-)(t^{\kappa}P_+ + P_-). \tag{3.2}$$

По теореме 3.3 оператор $t^{\kappa}P_+ + P_-$ нетеров и его идекс равен $-\kappa$. Тогда оператор R_G также нетеров и его индекс также равен $-\kappa$.

Если $\kappa < 0$, то

$$Gt^{-\kappa}P_+ + P_- = R_G(t^{-\kappa}P_+ + P_-), \tag{3.3}$$

так как и выше оператор R_G нетеров с индексом $-\kappa$. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что оператор R_G нетеров и его индекс равен $-\kappa$. Рассмотрим оператор R_Q, где $Q(t) = G(t)t^{-\kappa}$. По лемме 3.2 $R_Q = R_G(t^{-\kappa}P_+ + P_-) + K$, где K - компактный оператор в $L_M(\Gamma)$. По теореме 3.3 оператор $t^{-\kappa}P_+ + P_-$ нетеров в $L_M(\Gamma)$ и его индекс равен κ. Следовательно, оператор R_Q нетеров в $L_M(\Gamma)$ и $Ind\, R_Q = 0$. По теореме 3.1 $Q \in GL_\infty(\Gamma)$. Тогда по теореме 3.2 $n(R_Q) = d(R_Q) = 0$, следовательно, оператор R_Q обратим в $L_M(\Gamma)$. По лемме 3.1 оператор $R_{Q^{-1}}$ обратим в $L_N(\Gamma)$.

Пусть $\varphi_0 \in L_M(\Gamma)$ и $\psi_0 \in L_N(\Gamma)$ - решения уравнений $R_Q\varphi = 1$ и $R_{Q^{-1}}\psi = 1$, соответственно. Тогда

$$QP_+\varphi_0 = 1 - P_-\varphi_0, \quad Q^{-1}P_+\psi_0 = 1 - P_-\psi_0. \tag{3.4}$$

Следовательно, $(P_+\varphi_0)(P_+\psi_0) = (1 - P_-\varphi_0)(1 - P_-\psi_0)$. По лемме 2.6

$$(1 - P_-\varphi_0)(1 - P_-\psi_0) - 1 \in \overset{\circ}{L_1^-}(\Gamma), \quad (P_+\varphi_0)(P_+\psi_0) - 1 \in L_1^+(\Gamma).$$

Тогда из леммы 2.5 мы получаем

$$(P_+\varphi_0)(P_+\psi_0) = (1 - P_-\varphi_0)(1 - P_-\psi_0) = 1.$$

Положим $G_+ := P_+\psi_0$ и $G_- := 1 - P_-\varphi_0$, тогда $Q = G_-G_+$. Таким образом, $G(t) = G_-(t)t^\kappa G_+(t)$. Очевидно, что $G_- \in L_M^-(\Gamma)$, $G_+ \in L_N^+(\Gamma)$. Из (3.4) и равенства $Q = G_-G_+$ мы получим $G_-^{-1} = 1 - P_-\psi_0 \in L_N^-(\Gamma)$, $G_+^{-1} = P_+\varphi_0 \in L_M^+(\Gamma)$.

Осталось доказать ограниченность оператора $G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I$ в пространстве $L_M(\Gamma)$. Не ограничивая общности, предположим, что $\|Q\|_{L_\infty(\Gamma)} < 1$. Рассмотрим оператор

$$B = (G_+^{-1}P_+ + G_-P_-)G_-^{-1}I = I + (1 - Q)G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I.$$

Как и выше, можно доказать, что $BR_Q\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in L_M(\Gamma)$. Так как R_Q обратим, то $B = R_Q^{-1}$ ограничен, значит $G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I$ также ограничен в $L_M(\Gamma)$. ■

Следствие 3.1. *Если функция $G \in L_\infty(\Gamma)$ допускает факторизацию (3.1), то оператор R_G обратим в $L_M(\Gamma)$ слева, справа или с двух сторон, в зависимости от того, будет ли число κ положительным, отрицательным или равным нулю. Во всех случаях оператор, обратный к R_G с соответствующей стороны, задается равенством*

$$R_G^{-1} = (t^{-\kappa}P_+ + P_-)(G_+^{-1}P_+ + G_-P_-)G_-^{-1}I.$$

Замечание. Если $G \notin GL_\infty(\Gamma)$, то по теореме 3.1 опреатор R_G не нетеров, тогда по теореме 3.4 G не допускает факторизацию. Если $G \in GL_\infty(\Gamma)$, то

$$G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I = (G_+^{-1}P_+G_+I)(t^\kappa G^{-1}I) = (G^{-1}t^\kappa I)(G_-P_+G_-^{-1}I).$$

Отсюда следует, что условие (ii) в определении факторизации эквивалентно каждому из условий

(iii) оператор $G_+^{-1}SG_+I$ ограничен в $L_M(\Gamma)$,

(iv) оператор $G_-SG_-^{-1}I$ ограничен в $L_M(\Gamma)$.

4. Факторизация функции τ^γ

4.1. Достаточные условия

Пусть Γ - замкнутая карлесоновская кривая, удовлетворяющая условию (2.1). Зафиксируем $t \in \Gamma$. В этом пункте мы получим достаточные условия, при которых степенная функция τ^γ с разрывом в точке t допускает факторизацию в рефлексивном пространстве Орлича.

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, обозначим

$$\theta := \theta(\gamma, t) = \mathrm{Re}\,\gamma + \delta(t)\mathrm{Im}\,\gamma.$$

Лемма 4.1. *([23], лемма 6.1) Существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$\begin{aligned} c_1|z-t|^\theta \quad &\le |(z-t)^\gamma| \le \quad c_2|z-t|^\theta \quad \textit{для всех} \quad z \in D^+ \cup (\Gamma\backslash\{t\}) \\ c_1\left|1-\frac{t}{z}\right|^\theta \quad &\le \left|\left(1-\tfrac{t}{z}\right)^\gamma\right| \le \quad c_2\left|1-\frac{t}{z}\right|^\theta \quad \textit{для всех} \quad z \in D^- \cup (\Gamma\backslash\{t\}). \end{aligned}$$

Лемма 4.2. *Если $\theta \in [0,1)$, то*

$$\begin{aligned} (\tau-t)^\gamma \in L_N^+(\Gamma) \quad &, \quad (1-t/\tau)^\gamma \in L_N^-(\Gamma), \\ (\tau-t)^{1-\gamma} \in L_M^+(\Gamma) \quad &, \quad (1-t/\tau)^{1-\gamma} \in L_M^-(\Gamma). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, например, что $(\tau - t)^\gamma \in L_N^+(\Gamma)$. По лемме 1.2 (b) $\theta \ge 0 > \beta_M - 1 = -\alpha_N$. Тогда существует p, для которого $-\theta < 1/p < \alpha_N$. По лемме 4.1 существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|(z-t)^\gamma| \le c|z-t|^\theta < c|z-t|^{-\alpha_N}$$

для всех z из некоторой окрестности точки t. Функция $(z-t)^\gamma$ Аналитична в D^+ и непрерывна в $\overline{D^+}\backslash\{t\}$. По аналогии с [5, теор. 4.8, гл. 2] доказывается, что $(\tau-t)^\gamma \in L_p^+(\Gamma)$. Из теоремы 1.2 и леммы 1.2 следует, что $L_p^+(\Gamma) \subset L_N^+(\Gamma)$. Тогда $(\tau-t)^\gamma \in L_N^+(\Gamma)$. Остальные утверждения доказываются аналогично. ■

Аналогично доказываются следующие две леммы:

Лемма 4.3. *Если $\theta \in [0, \alpha_M)$, то*

$$(\tau-t)^{-\gamma} \in L_M^+(\Gamma), \quad (1-t/\tau)^{-\gamma} \in L_M^-(\Gamma).$$

Лемма 4.4. *Если $\theta \in (\beta_M, 1)$, то*

$$(\tau-t)^{\gamma-1} \in L_N^+(\Gamma), \quad (1-t/\tau)^{\gamma-1} \in L_N^-(\Gamma).$$

Теорема 4.1. *(a) Если $\theta \in [0, \alpha_M)$, то представление*

$$\tau^\gamma = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-\gamma} (\tau - t)^\gamma \tag{4.1}$$

является факторизацией в $L_M(\Gamma)$.
(b) Если $\theta \in (\beta_M, 1)$, то представление

$$\tau^\gamma = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma} \tau\, (\tau - t)^{\gamma - 1} \tag{4.2}$$

является факторизацией в $L_M(\Gamma)$.

Доказательство. Докажем утверждение (a). Существуют $p, q > 1$ такие, что

$$\frac{1}{p} - 1 < \frac{1}{q} - 1 < \theta < \frac{1}{p} < \alpha_M \leq \beta_M < \frac{1}{q}.$$

Согласно [6, теор. 2.6] (см. также [23, предложение 2.3]) оператор

$$A = (\tau - t)^{-\gamma} P_+ \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^\gamma I$$

огрничен в пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$ и $L_q(\Gamma)$. По теореме 1.3 оператор A ограничен в $L_M(\Gamma)$. Отсюда и из лемм 4.2 и 4.3 следует наше утверждение.

Утверждение (b) доказывается аналогично с применением лемм 4.2 и 4.4. ■

4.2. К доказательству необходимости

Теорема 4.2. *Пусть Γ – замкнутая гладкая кривая, пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, для которого $Re\,\gamma \in [0, 1)$.*

(a) Если оператор

$$A_0 = (\tau - t)^{-\gamma} S (\tau - t)^\gamma I$$

ограничен в $L_M(\Gamma)$, то $Re\,\gamma \leq \alpha_M$.

(b) Если оператор

$$A_1 = (\tau - t)^{1-\gamma} S (\tau - t)^{\gamma - 1} I$$

ограничен в $L_M(\Gamma)$, то $\beta_M \leq Re\,\gamma$.

Доказательство. (a) Так как оператор A_0 ограничен в $L_M(\Gamma)$, то оператор

$$B = (\tau - t)^{-\gamma} S_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (\tau - t)^\gamma I$$

ограничен в $L_M(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, где $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{t\}, \quad |\Gamma_1| = |\Gamma_2| = s_0$, число s_0 выберем позднее. Дугу $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ можно задать параметрически:

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{\tau = \tau(s) : \quad s \in [-s_0, s_0], \quad \tau(0) = t\}.$$

Так как кривая гладкая, то $\delta(t)=0$, тогда $\theta = Re\,\gamma$. Пусть $\varphi \in L_M(\Gamma_2)$. Рассмотрим оператор C, определенный формулами

$$(C\varphi)(s) = \begin{cases} h_1(s)\varphi^*(-s), & s \in [-s_0, 0), \\ 0, & s \in [0, s_0], \end{cases}$$

где

$$h_1(s) = \frac{(-s)^\theta}{\tau'(s)}(\tau(s)-\tau(0))^{-\gamma}, \quad s \in [-s_0, 0).$$

Тогда

$$|h_1(s)| = (-s)^\theta |\tau(s)-\tau(0)|^{-\theta} \exp(Im\,\gamma \arg(\tau(s)-\tau(0))). \quad s \in [-s_0, 0).$$

Так как $\tau : [-s_0, 0] \to \Gamma_1$ – параметризация гладкой дуги, то существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 \le |h_1(s)| \le c_2$ для всех $s \in [-s_0, 0)$. То есть $h_1 \in L_\infty([-s_0, 0))$. Тогда оператор $C : L_M(\Gamma_2) \to L_M([-s_0, s_0])$ ограничен. Рассмотрим оператор замены переменных $W : L_M(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \to L_M([-s_0, s_0])$, действующий по правилу $(W\varphi)(s) = \varphi[\tau(s)]$.

При $s > 0$ рассмотрим

$$\begin{aligned}
(WBW^{-1}C\varphi)(s) &= (\tau(s)-\tau(0))^{-\gamma} \int_{-s_0}^{s_0} \frac{(\tau(\sigma)-\tau(0))^\gamma}{\tau(\sigma)-\tau(s)} (C\varphi)(\sigma)\tau'(\sigma)d\sigma \\
&= (\tau(s)-\tau(0))^{-\gamma} \int_{-s_0}^{0} \frac{(-\sigma)^\theta \varphi^*(-\sigma)}{\tau(\sigma)-\tau(s)} d\sigma \qquad (4.3) \\
&= h_2(s)s^{-\theta} \int_0^{s_0} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} \cdot \frac{(\sigma+s)\tau'(0)}{\tau(-\sigma)-\tau(s)} d\sigma,
\end{aligned}$$

где

$$h_2(s) = \frac{s^\theta}{\tau'(0)}(\tau(s)-\tau(0))^{-\gamma}.$$

Так как дуга Γ_2 – гладкая, то так же, как для функции h_1 доказывается, что $h_2^{\pm} \in L_\infty([0, s_0])$. Тогда оператор $F : L_M([0, s_0]) \to L_M([0, s_0])$, действующий по правилу $(F\varphi)(s) = h_2(s)\varphi(s)$, непрерывно обратим. Следовательно оператор

$$R = F^{-1}\chi_{[0,s_0]}WBW^{-1}C$$

ограниченно действует из пространства $L_M(\Gamma_2)$ в пространство $L_M([0, s_0])$.

Рассмотрим функцию

$$H(s,\sigma) := \frac{(\sigma+s)\tau'(0)}{\tau(-\sigma)-\tau(s)}.$$

Зададим $\varepsilon \in (0, 1/4)$. Выберем s_0 так, чтобы

$$\left| \left| \frac{\tau(-\sigma)-\tau(s)}{\sigma+s} \right| - 1 \right| \le \left| \frac{\tau(-\sigma)-\tau(s)}{\sigma+s} - \tau'(0) \right| < \varepsilon$$

при $\sigma, s \in [0, s_0]$. Тогда

$$|H(s,\sigma)-1| = \left|\frac{\tau(-\sigma)-\tau(s)}{\sigma+s} - \tau'(0)\right| \cdot \left|\frac{\tau(-\sigma)-\tau(s)}{\sigma+s}\right|^{-1} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$\max\left\{|Re\, H(s,\sigma)-1|, |Im\, H(s,\sigma)|\right\} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Значит $Re\, H(s,\sigma) > (1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon)$. Тогда

$$\left|\int_0^{s_0} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} H(s,\sigma)d\sigma\right| \geq$$

$$\left|\int_0^{s_0} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} Re\, H(s,\sigma)d\sigma\right| - \left|\int_0^{s_0} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} Im\, H(s,\sigma)d\sigma\right| \geq$$

$$\left(1-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\int_0^{s_0} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} d\sigma =$$

$$\left(1-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\left(\int_0^{s} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} d\sigma + \int_s^{s_0} \frac{\sigma^\theta \varphi^*(\sigma)}{\sigma+s} d\sigma\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{s}\int_0^{s} \sigma^\theta \varphi^*(\sigma) d\sigma + \int_s^{s_0} \sigma^{\theta-1} \varphi^*(\sigma) d\sigma\right).$$

Таким образом для любой функции $\varphi \in L_M(\Gamma_2)$ в силу (4.3) получаем

$$\begin{aligned} |(R\varphi)(s)| &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)((P_{\theta+1}\varphi^*)(s) + (Q_\theta\varphi^*)(s)) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\max\left\{(P_{\theta+1}\varphi^*)(s), (Q_\theta\varphi^*)(s)\right\}, \end{aligned}$$

где $P_{\theta+1}, Q_\theta$ – взвешенные операторы усреднения, определяемые формулами (1.4) и (1.5). Так как оператор R ограничен, то существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\varphi \in L_M(\Gamma_2)$

$$\begin{aligned} \|\varphi^*\|_{L_M([0,s_0])} &= \|\varphi\|_{L_M(\Gamma_2)} \geq c\|R\varphi\|_{L_M([0,s_0])} \\ &\geq c\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\max\left\{\|P_{\theta+1}\varphi^*\|_{L_M([0,s_0])}, \|Q_\theta\varphi^*\|_{L_M([0,s_0])}\right\}, \end{aligned}$$

то есть операторы $P_{\theta+1}$ и Q_θ ограничены в $L_M(\Gamma_2^*) = L_M([0,s_0])$.

По лемме 1.3, примененной к оператору Q_θ, получим $Re\,\gamma = \theta \leq \alpha_M$.

(b) Если оператор A_1 ограничен, то аналогично предыдущему получим, что операторы P_θ и $Q_{\theta-1}$ ограничены. Тогда по лемме 1.3, примененной к оператору P_θ, получим $Re\,\gamma = \theta \geq \beta_M$. ∎

5. Нетеровость СИО с PC коэффициентом

5.1. Критерий нетеровости

Пусть Γ - замкнутая ориентированная карлесоновская кривая, удовлетворяющая условию (2.1). Обозначим $PC(\Gamma)$ банахову алгебру всех кусочно непрерывных функций на кривой Γ: функция $G \in L_\infty(\Gamma)$ принадлежит $PC(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $t \in \Gamma$ существуют односторонние пределы

$$G(t \pm 0) := \lim_{\tau \to t \pm 0} G(\tau).$$

Из локального принципа И.Б.Симоненко, И.Ц.Гохберга - Н.Я.Крупника [17], [5, гл. 12], [24, гл. 1] вытекает следующая теорема:

Теорема 5.1. *Пусть $G \in PC(\Gamma)$ и $G(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда для любой точки $t \in \Gamma$ оператор R_{G_t} нетеров в $L_M(\Gamma)$, где функция $G_t(\tau) := \tau^{\gamma_t}$ непрерывна на $\Gamma \backslash \{t\}$,*

$$\gamma_t := \frac{1}{2\pi i} \log \frac{G(t-0)}{G(t+0)}.$$

Заметим, что здесь можно выбрать произвольную ветвь логарифма.

Пусть $G \in PC(\Gamma)$ и $G(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Определим функцию

$$\theta(t) := \operatorname{Re} \gamma_t + \delta(t) \operatorname{Im} \gamma_t = \frac{1}{2\pi} \left(\arg \frac{G(t-0)}{G(t+0)} - \delta(t) \log \left| \frac{G(t-0)}{G(t+0)} \right| \right), \quad t \in \Gamma.$$

Здесь и ниже мы выбираем значение $\arg(\cdot)$ так, чтобы $\arg(\cdot) - \delta(t) \log |\cdot| \in [0, 2\pi)$.

Теорема 5.2. *Оператор R_G нетеров в пространстве Лебега $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда для всех $t \in \Gamma$*

$$(i)\ G(t \pm 0) \neq 0, \quad (ii)\ \theta(t) \neq 1/p.$$

Для ляпуновских кривых эта теорема доказана И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [2] (случай пространств Лебега со степенным весом рассмотрен в [5]). Обобщение этих результатов на случай весов Макенхаупта принадлежит И.М.Спитковскому [39] (см. также [35]). Для карлесоновских кривых, удовлетворяющих условию (2.1), теорема 5.2 получена А.В.Айзенштатом, Ю.И.Карловичем, Г.С.Литвинчуком [21] в случае степенного веса и А.Беттчером и Ю.И.Карловичем [23] в случае общего веса Макенхаупта.

Условие IS. Будем говорить, что для рефлексивного пространства Орлича выполняется условие IS (indices-smooth), если выполнено одно из условий

1) $\alpha_M = \beta_M, \Gamma$ – замкнутая карлесоновская кривая, удовлетворяющая условию (2.1);

2) Γ – замкнутая гладкая кривая.

Теорема 5.3. *(a) Пусть $L_M(\Gamma)$ удовлетворяет условию IS. Если оператор R_G нетеров, то для всех $t \in \Gamma$*

$$(i)\ G(t \pm 0) \neq 0, \quad (ii)\ \theta(t) \notin [\alpha_M, \beta_M].$$

(b) Пусть Γ – замкнутая карлесоновская кривая, $L_M(\Gamma)$ – рефлексивное пространство Орлича с индексами Бойда $\alpha_M \leq \beta_M$. Если для всех $t \in \Gamma$ выполнены условия (i) и (ii), то оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$.

Доказательство. Идея доказательства утверждения (a) заимствована из [39, теор. 2.1]. Если оператор R_G нетеров, то условие (i) вытекает из теоремы 3.1. В этом случае по теореме 5.1 нетеровость оператора R_G эквивалентна нетеровости всех операторов R_{G_t}, $t \in \Gamma$, где $G_t(\tau) = \tau^{\gamma_t}$ - непрерывная на $\Gamma \backslash \{t\}$ функция. Зафиксируем $t \in \Gamma$.

Покажем, что $\theta(t) \notin [\alpha_M, \beta_M]$. Предположим противное. Если $\alpha_M = \beta_M$, то используя теорему 4.1, мы можем получить противоречие со свойством устойчивости индекса нетерова оператора так же, как и в случае пространства Лебега (см. [5, гл. 9]).

Пусть теперь $\alpha_M < \beta_M$. Рассмотрим случай $\theta(t) \in (\alpha_M, \beta_M)$. По теореме 3.4 коэффициент τ^{γ_t} допускает факторизацию

$$\tau^{\gamma_t} = a_-(\tau)\tau^{\kappa}a_+(\tau), \quad \tau \in \Gamma, \tag{5.1}$$

где $a_- \in L^-_M(\Gamma), a_+ \in L^+_N(\Gamma), a_-^{-1} \in L^-_N(\Gamma), a_+^{-1} \in L^+_M(\Gamma)$. Сравнивая (4.1) с (5.1), мы получим

$$(\tau - t)^{\gamma_t}\, a_+^{-1}(\tau) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\gamma_t} a_-(\tau)\tau^{\kappa}. \tag{5.2}$$

По лемме 4.2 $(\tau - t)^{\gamma_t} \in L^+_N(\Gamma)$ и $(1 - t/\tau)^{\gamma_t} \in L^-_N(\Gamma)$. Тогда из леммы 2.6 вытекает

$$(\tau - t)^{\gamma_t}\, a_+^{-1}(\tau) \in L^+_1(\Gamma), \quad (1 - t/\tau)^{\gamma_t}\, a_-(\tau) \in L^-_1(\Gamma).$$

Случай $\kappa < 0$ невозможен, ибо тогда обе части равенства (5.2) равны нулю.

Если $\kappa = 0$, то обе части (5.2) равны ненулевой константе C, тогда $a_+(\tau) = C^{-1}(\tau - t)^{\gamma_t}$. По определению факторизации оператор $(\tau - t)^{-\gamma_t} S (\tau - t)^{\gamma_t} I$ ограничен в $L_M(\Gamma)$. Тогда по теореме 4.2 (a) $\theta(t) \leq \alpha_M$, что противоречит предположению.

Если $\kappa > 0$, то обе части (5.2) совпадают с полиномом $h(z)$. Так как функции $a(z)$ и $(1-t/z)^{-\gamma_t}$ имеют ненулевые пределы в бесконечности, то степень $h(z)$ совпадает с κ. Все κ нулей $h(z)$ лежат на Γ, ибо левая (правая) часть (5.2) не исчезает в $D^+ (D^-)$. Тогда

$$a_+(\tau) = \frac{(\tau - t)^{\gamma_t}}{h(\tau)} \in L^+_N(\Gamma) \subset L_1(\Gamma).$$

Это возможно только в том случае, когда на Γ нет нулей полинома $h(z)$, исключая точку t, причем последний нуль простой. Другими словами, $\kappa = 1$ и $h(z) = C(z - t)$. Тогда $a_+(\tau) = C(\tau - t)^{\gamma_t - 1}$. По определению факторизации оператор

$(\tau - t)^{1-\gamma_t} S(\tau - t)^{\gamma_t - 1} I$ ограничен в $L_M(\Gamma)$. Тогда по теореме 4.2 (b) $\beta_M \le \theta(t)$, что противоречит предположению.

Таким образом, $\theta(t) \notin (\alpha_M, \beta_M)$. Пусть теперь $\theta(t) = \alpha_M$ (случай $\theta(t) = \beta_M$ рассматривается аналогично). Так как оператор R_{G_t} нетеров, то в силу устойчивости нетеровости существует такое ε, что $\theta(t) + \varepsilon \in (\alpha_M, \beta_M)$ и оператор $\tau^{\gamma_t + \varepsilon} P_+ + P_-$ также нетеров. Это противоречит только что доказанному и завершает доказательство необходимости.

Утверждение (b) следует из теоремы 4.1 и локального принципа (теорема 5.1). Отметим, что с помощью теорем 1.5 и 5.2 можно дать другое доказательство, не использующее локальный принцип. ■

Отметим, что некоторые достаточные условия нетеровости СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в симметричных пространствах на ляпуновских кривых получены И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [2] (см. также [5, гл 9., §11]).

Теорема 5.4. *(a) Пусть Γ – замкнутая карлесоновская кривая, удовлетворяющая условию (2.1), $G \in L_\infty(\Gamma)$. Если оператор R_G нетеров во всех пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$, где $1/p \in [\alpha_M, \beta_M], \alpha_M, \beta_M$ – индексы Бойда рефлексивного пространства Орлича $L_M(\Gamma)$, то оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$,*

$$Ind\, R_G | L_M(\Gamma) = Ind\, R_G | L_p(\Gamma), \quad \text{где} \quad 1/p \in [\alpha_M, \beta_M]. \tag{5.3}$$

(b) Пусть $L_M(\Gamma)$ удовлетворяет условию IS, пусть $G \in PC(\Gamma)$. Если оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$, то он нетеров в любом пространстве $L_p(\Gamma)$, где $1/p \in [\alpha_M, \beta_M]$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из теоремы 1.5. Утверждение (b) следует из теорем 5.2 и 5.3. ■

5.2. Формула индекса

В этом пункте мы получим эффективную формулу индекса оператора R_G, где G - кусочно непрерывная функция с конечным числом точек разрыва.

Теорема 5.5. *(принцип разделения особенностей). Пусть Γ - замкнутая карлесоновская кривая. Пусть*

$$G = g_1 \dots g_m f,$$

функция f непрерывна и не имеет нулей на Γ, а функции g_j непрерывны на $\Gamma \backslash \{t_j\}, j = \overline{1,m}$, причем все точки $t_1, \dots, t_m$ различны. Если все операторы $R_{g_1}, \dots, R_{g_m}$ нетеровы в $L_M(\Gamma)$, то оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$ и

$$Ind\, R_G = \sum_{j=1}^{m} Ind\, R_{g_j} - \frac{1}{2\pi} \{Arg\, f(\tau)\}_\Gamma.$$

Эта теорема доказывается аналогично случаю пространства $L_p(\Gamma)$ на ляпуновской кривой (см. [5, гл. 7, §7]). При этом существенно используется лемма 3.2.

Теорема 5.6. *Пусть $L_M(\Gamma)$ удовлетворяет условию IS. Пусть $t_1, \dots, t_m$ - все точки разрыва функции G. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ - дуги, на которые контур Γ разбивается точками разрыва функции G. Если оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$, то его индекс вычисляется по формуле*

$$Ind\, R_G = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\left(\arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)} - \{Arg\, G(\tau)\}_{\Gamma_j}\right) - l,$$

где l - число точек разрыва, для которых $\theta(t_j) > \beta_M$.

Доказательство. Если оператор R_G нетеров, то функция G представима в виде

$$G(\tau) = G_0(\tau)\tau^{\gamma_1}\dots\tau^{\gamma_m},$$

где G_0 - непрерывная функция, не имеющая нулей на Γ, $\gamma_j := \gamma_{t_j}$ и степенные функции $G_{t_j}(\tau) = \tau^{\gamma_j}$ имеют разрывы в точках t_j. Так как

$$\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)} = \frac{(t_j-0)^{\gamma_j}}{(t_j+0)^{\gamma_j}}$$

и $\theta(t_j) \notin [\alpha_M, \beta_M]$, то по теоремам 3.4 и 4.1

$$Ind\, R_{\tau^{\gamma_j}} = \begin{cases} 0, & \theta(t_j) \in [0, \alpha_M) \\ -1, & \theta(t_j) \in (\beta_M, 1). \end{cases}$$

По теореме 5.5

$$Ind\, R_G = \sum_{j=1}^{m} Ind\, R_{\tau^{\gamma_j}} - \frac{1}{2\pi}\{Arg\, G_0(\tau)\}_\Gamma.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\{Arg\, G_0(\tau)\}_\Gamma &= \sum_{j=1}^{m}\left(\{Arg\, G(\tau)\}_{\Gamma_j} - \sum_{k=1}^{m}\{Arg\, \tau^{\gamma_k}\}_{\Gamma_j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\{Arg\, G(\tau)\}_{\Gamma_j} - \{Arg\, \tau^{\gamma_j}\}_{\Gamma\setminus\{t_j\}}\right).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\{Arg\, \tau^{\gamma_j}\}_{\Gamma\setminus\{t_j\}} = \arg\frac{(t_j-0)^{\gamma_j}}{(t_j+0)^{\gamma_j}} = \arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)}.$$

Итак,

$$\begin{aligned}Ind\, R_G &= \sum_{j=1}^{m} Ind\, R_{\tau^{\gamma_j}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\left(\{Arg\, G(\tau)\}_{\Gamma_j} - \arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\left(\arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)} - \{Arg\, G(\tau)\}_{\Gamma_j}\right) - l.\end{aligned}$$

■

5.3. Нетеровость R_G на геометрическом языке

Пусть даны два действительных числа a, b, удовлетворяющих неравенствам $0 < a \le b < 1$, два комплексных числа z, w и действительное число δ, определим спиралевидный рожок

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z,w;\delta;a,b) &:= \{z,w\} \\ &\bigcup \left\{u \in \mathbb{C}\backslash\{z,w\} : \frac{1}{2\pi}\left(\arg\frac{u-z}{u-w} - \delta\log\left|\frac{u-z}{u-w}\right|\right) \in [a,b]\right\}. \end{aligned}$$

Если $z = w$, то $\mathcal{S}(z,z;\delta;a,b) = \{z\}$. Если $z \neq w$ и $a < b$, то $\mathcal{S}(z,w;0;a,b)$ является обыкновенным рожком (луночкой), т.е. замкнутым множеством, ограниченным двумя дугами окружностей, соединяющими точки z и w. С другой стороны, если $\delta \neq 0$ и $a < b$, то $\mathcal{S}(z,w;\delta;a,b)$ является замкнутым множеством, граница которого состоит из двух (двойных) логарифмических спиралей $\mathcal{S}(z,w;\delta;a,a)$ и $\mathcal{S}(z,w;\delta;b,b)$. Множество $\mathcal{S}(z,w;\delta;a,b)$ и термин "спиралевидный рожок" для него были введены А.Беттчером и Ю.И.Карловичем в [23].

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\mathcal{S}(z,w;\delta;a,b) = \{z(1-\mu) + w\mu : \mu \in \mathcal{S}(0,1;\delta;a,b)\}. \tag{5.4}$$

Согласно [23] спираль $\mathcal{S}(z,w;\delta;a,a)$ можно задать параметрически:
$\xi \in \mathcal{S}(z,w;\delta;a,a), x \in [0,1]$,

$$\xi = \frac{w\exp(\varphi_{\delta,a}(x)) - z}{\exp(\varphi_{\delta,a}(x)) - 1}, \quad \text{где} \quad \varphi_{\delta,a}(x) = (1+i\delta)\log\frac{x}{1-x} + 2\pi i a. \tag{5.5}$$

Свяжем с каждой функцией $G \in PC(\Gamma)$ множество G_M, состоящее из образа функции G, дополненного спиралевидными рожками

$$\mathcal{S}(G(t_k-0), G(t_k+0); \delta(t_k); \alpha_M, \beta_M),$$

где t_k – все точки разрыва функции G. Ясно, что

$$G_M = \bigcup_{\tau\in\Gamma} \mathcal{S}(G(\tau-0), G(\tau+0); \delta(\tau); \alpha_M, \beta_M).$$

Функцию $G \in PC(\Gamma)$ будем называть M-неособенной, если множество G_M не содержит нуля. Тогда множество G_M^{φ}, получающееся из G_M заменой каждого спиралевидного рожка $\mathcal{S}(G(t_k-0), G(t_k+0); \delta(t_k); \alpha_M, \beta_M)$ на логарифмическую спираль $\mathcal{S}(G(t_k-0), G(t_k+0); \delta(t_k); \varphi, \varphi)$, где $\varphi \in [\alpha_M, \beta_M]$, является замкнутой непрерывной кривой, не проходящей через нуль, которую можно естественным образом ориентировать. Число оборотов этой кривой вокруг нуля не зависит от $\varphi \in [\alpha_M, \beta_M]$, обозначим его $wind\, G$.

Теорема 5.7. *Пусть $L_M(\Gamma)$ удовлетворяет условию IS, $G \in PC(\Gamma)$. Оператор R_G нетеров в $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда функция G M-неособенна. Если R_G нетеров, то*

$$Ind\, R_G = -wind\, G.$$

Доказательство. Легко видеть, что функция G M-неособенна тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы 5.3. Формула индекса следует из аналогичного результата для пространств $L_p(\Gamma)$ [23] (см. еще [5], гл. 9) и теоремы 5.4. ■

6. Алгебра сингулярных интегральных операторов

6.1. Идеал компактных операторов

Пусть $L^n_M(\Gamma)$ – прямая сумма n копий рефлексивного пространства Орлича $L_M(\Gamma)$, удовлетворяющего условию IS. Пусть $\mathcal{L} := \mathcal{L}(L^n_M(\Gamma))$ – банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве $L^n_M(\Gamma)$. Будем обозначать $C^{n\times n}(\Gamma)$ ($PC^{n\times n}(\Gamma), L^{n\times n}_\infty(\Gamma)$) множество всех матриц-функций с элементами из $C(\Gamma)$ ($PC(\Gamma), L_\infty(\Gamma)$), соответственно. Пусть $I^{(n)} := \mathrm{diag}\{I,\dots,I\}$, $S^{(n)} := \mathrm{diag}\{S,\dots,S\}$. Тогда $P^{(n)}_\pm := \mathrm{diag}\{P_\pm,\dots,P_\pm\}$.

В этом параграфе мы получим критерий нетеровости для операторов из наименьшей банаховой подалгебры $\mathfrak{A} := \mathrm{alg}(PC^{n\times n}, S^{(n)})$ алгебры $\mathcal{L}$, содержащей операторы умножения на кусочно непрерывные матрицы-функции и оператор $S^{(n)}$. Будем следовать схеме рассуждений из [23].

Лемма 6.1. *Множество $\mathcal{K}(L^n_M(\Gamma))$ всех компактных операторов в $L^n_M(\Gamma)$ содержится в $alg(C^{n\times n}, S^{(n)})$ – наименьшей банаховой подалгебре $\mathcal{L}(L^n_M(\Gamma))$, содержащей операторы умножения на непрерывные матрицы-функции и оператор $S^{(n)}$.*

Доказательство. Оператор

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} : L^n_M(\Gamma) \to L^n_M(\Gamma)$$

принадлежит $\mathcal{K}(L^n_M(\Gamma))$ ($\mathrm{alg}(C^{n\times n}, S^{(n)})$) тогда и только тогда, когда каждый из его элементов принадлежит $\mathcal{K}(L_M(\Gamma))$ ($\mathrm{alg}(C, S)$). Потому достаточно доказать утверждение в случае $n = 1$.

Так как пространство $L_M(\Gamma)$ имеет базис [11, с.120], то оно обладает свойством аппроксимации, т.е. каждый компактный оператор в $L_M(\Gamma)$ может быть приближен по операторной норме конечномерными операторами. По лемме 1.1 (b) конечномерный оператор в $L_M(\Gamma)$ имеет вид

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) \int_\Gamma b_j(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in \Gamma, \tag{6.1}$$

где $a_j \in L_M(\Gamma), b_j \in L_N(\Gamma)$. Так как $C(\Gamma)$ плотно в $L_M(\Gamma)$ и $L_N(\Gamma)$ [11, с. 99], каждый оператор вида (6.1) может быть приближен по операторной норме операторами такого же вида, но с непрерывными a_j и b_j. Потому оператор (6.1) очевидно равен

$$K = \sum_{j=1}^{m} a_j (S\chi I - \chi S) b_j I,$$

где $\chi(\tau) = \tau$ при $\tau \in \Gamma$. Следовательно, K принадлежит $\operatorname{alg}(C, S)$ при $a_j, b_j \in C(\Gamma)$. ■

Из леммы 6.1 следует, что $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L^n_M(\Gamma))$ – замкнутый двухсторонний идеал в $\mathfrak{A}$. Потому мы можем рассмотреть фактор-алгебру $\mathfrak{A}^\pi := \mathfrak{A}/\mathcal{K}$, элементами которой являются классы смежности $A^\pi := A + \mathcal{K}$, где $A \in \mathfrak{A}$.

Для изучения обратимости в $\mathfrak{A}^\pi$ мы будем использовать локальный принцип Аллана-Дугласа и теорему о двух проекторах Финка-Роха-Зильберманна, Гохберга-Крупника.

6.2. Локальный принцип Аллана-Дугласа

Пусть B – банахова алгебра с единицей. Подалгебра Z алгебры B называется центральной подалгеброй, если для всех $z \in Z$ и $b \in B$ выполняется равенство $zb = bz$. Очевидно, что центральная подалгебра коммутативна.

Под гомоморфизмом банаховых алгебр будем понимать непрерывный алгебраический гомоморфизм. Символьным отображением σ унитальной банаховой алгебры B в унитальную банахову алгебру D называется гомоморфизм банаховых алгебр, при котором элемент $b \in B$ обратим в B тогда и только тогда, когда элемент $\sigma(b) \in D$ обратим в D. При этом элемент $\sigma(b) \in D$ будем называть символом элемента $b \in B$.

Сформулируем локальный принцип Аллана-Дугласа (см., например, [24, гл. 1]).

Теорема 6.1. *Пусть B – банахова алгебра с единицей e, Z – замкнутая центральная подалгебра алгебры B, содержащая e. Пусть Ω – компакт максимальных идеалов алгебры Z. Пусть J_ω – наименьший замкнутый двухсторонний идеал алгебры B, содержащей идеал $\omega \in \Omega$. Тогда элемент b обратим в B тогда и только тогда, когда $b + J_\omega$ обратим в B/J_ω для всех $\omega \in \Omega$. Более того, отображение*

$$\sigma : B \to \bigoplus_{\omega \in \Omega} B/J_\omega, \quad b \to (b + J_\omega)_{\omega \in \Omega},$$

где $\bigoplus_{\omega\in\Omega} B/J_\omega$ – банахова алгебра с нормой $\sup_{\omega\in\Omega} \|b + J_\omega\|$, является символьным отображением.

Мы будем использовать центральную подалгебру

$$Z := \{(cI^{(n)})^\pi : c \in C(\Gamma)\},$$

где $cI^{(n)}$ обозначает оператор умножения на диагональную матрицу-функцию $\operatorname{diag}\{c, \dots, c\}$. Будем говорить, что оператор $A \in \mathcal{L}$ является оператором локального типа, если $AcI^{(n)} - cA \in \mathcal{K}$ для всех $c \in C(\Gamma)$. Легко видеть, что множество $\mathfrak{B}$ всех операторов локального типа является банаховой подалгеброй алгебры $\mathcal{L}$ и оператор $A \in \mathfrak{B}$ нетеров тогда и только тогда, когда класс смежности $A^\pi = A + \mathcal{K}$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{B}^\pi := \mathfrak{B}/\mathcal{K}$. По определению $\mathfrak{B}$ алгебра Z является центральной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}^\pi$. Таким образом, мы можем применить теорему 6.1 к алгебрам $\mathfrak{B}^\pi$ и Z. Компакт максимальных идеалов Ω алгебры Z может быть отождествлен с кривой Γ с помощью преобразования Гельфанда $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} : Z \to C(\Gamma), \quad (\mathcal{G}(cI^{(n)})^\pi)(t) = c(t).$$

В соответствии с теоремой 6.1 для каждого $t \in \Gamma$ определим $J_t \subset \mathfrak{B}^\pi$ – наименьший замкнутый двухсторонний идеал, содержащий идеал $\{(cI^{(n)})^\pi : c \in C(\Gamma), c(t) = 0\}$. Пусть $\chi_t \in PC(\Gamma)$ – функция, удовлетворяющая условиям $\chi_t(t-0) = 0$ и $\chi_t(t+0) = 1$. Для $a \in PC^{n\times n}(\Gamma)$ определим матрицу-функцию $a_t \in PC^{n\times n}(\Gamma)$ формулой

$$a_t = a(t-0)(1-\chi_t) + a(t+0)\chi_t. \tag{6.2}$$

Ясно, что $(aI^{(n)})^\pi - (a_tI^{(n)})^\pi \in J_t$. Следовательно, если $A \in \mathfrak{A}$, то $A^\pi + J_t$ принадлежит наименьшей унитальной банаховой подалгебре W_t алгебры $\mathfrak{B}^\pi/J_t$, содержащей классы смежности $(cI^{(n)})^\pi + J_t \quad (c \in \mathbb{C}^{n\times n})$,

$$p := (P_+^{(n)})^\pi + J_t = ((I^{(n)} + S^{(n)})/2)^\pi + J_t \quad \text{и} \quad q := (\chi_t I^{(n)})^\pi + J_t, \tag{6.3}$$

где $\chi_t I^{(n)}$ обозначает оператор умножения на диагональную матрицу-функцию $\operatorname{diag}\{\chi_t, \dots, \chi_t\}$.

6.3. Теорема о двух проекторах

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{C} := \{(cI^{(n)})^\pi + J_t : c \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$ алгебры W_t. Так как $\mathcal{C}$ изоморфна $\mathbb{C}^{n\times n}$, то мы можем (и будем) отождествлять $\mathcal{C}$ с $\mathbb{C}^{n\times n}$. Так как, очевидно, $p^2 = p$ и $q^2 = q$, то алгебра W_t порождена двумя проекторами p, q и подалгеброй $\mathcal{C} = \mathbb{C}^{n\times n}$, элементы которой коммутируют с p и q. Мы можем применить следующую теорему Финка, Роха, Зильберманна [33] и Гохберга, Крупника [34].

Теорема 6.2. *Пусть F – банахова алгебра с единицей e, пусть $\mathcal{C} = \mathbb{C}^{n\times n}$ – банахова подалгебра алгебры F, содержащая e, пусть p и q – проекторы в F такие, что $cp = pc$ и $cq = qc$ для всех $c \in \mathcal{C}$. Пусть $W = alg(\mathcal{C}, p, q)$ – наименьшая банахова подалгебра алгебры F, содержащая $\mathcal{C}, p, q$. Пусть*

$$x = pqp + (e-p)(e-q)(e-p),$$

обозначим $sp\, x$ – спектр элемента x в алгебре F, предположим, что 0 и 1 не являются изолированными точками $sp\, x$. Тогда

(a) для каждого $\mu \in sp\, x$ отображение $\sigma_\mu : \mathcal{C} \cup \{p, q\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, определенное формулами

$$\sigma_\mu c = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \sigma_\mu p = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\sigma_\mu q = \begin{pmatrix} \mu E & \sqrt{\mu(1-\mu)}E \\ \sqrt{\mu(1-\mu)}E & (1-\mu)E \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где $c \in \mathcal{C}, E$ обозначает единичную $n \times n$ матрицу и $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ обозначает комплексное число, квадрат которого равен $\mu(1-\mu)$, продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр $\sigma_\mu : W \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$;

(b) элемент $a \in W$ обратим в F тогда и только тогда, когда $\det \sigma_\mu a \neq 0$ для всех $\mu \in sp\, x$;

(c) алгебра W обратимо замкнута в алгебре F тогда и только тогда, когда спектр x в W совпадает со спекторм x в F, в этом случае отображение

$$\sigma : W \to \bigoplus_{\mu \in sp\, x} \mathbb{C}^{2n\times 2n}, \quad a \to (\sigma_\mu a)_{\mu\in sp\, x}$$

является символьным отображением, т.е. элемент $a \in W$ обратим в W тогда и только тогда, когда $\det \sigma_\mu a \neq 0$ для всех $\mu \in sp\, x$.

6.4. Локальный спектр

Применим теорему 6.2 к алгебре $F := \mathfrak{B}^\pi/J_t$ и алгебре $W := W_t$, порожденной двумя проекторами (6.3) и подалгеброй $\mathcal{C} = \mathbb{C}^{n\times n}$.

Лемма 6.2. *Спектр элемента*

$$x = pqp + (e-p)(e-q)(e-p) = (P_+^{(n)}\chi_t P_+^{(n)} + P_-^{(n)}(1-\chi_t)P_-^{(n)})^\pi + J_t \tag{6.6}$$

в алгебре $F = \mathfrak{B}^\pi/J_t$ совпадает со спиралевидным рожком $\mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$.

Доказательство. Мы имеем

$$x - \lambda e = p(q-\lambda)p + (e-p)(e-q-\lambda)(e-p)$$

и

$$\begin{aligned} pap + (e-p)b(e-p) &= (pap + e - p)((e-p)b(e-p) + p) \\ &= ((e-p)b(e-p) + p)(pap + e - p) \end{aligned}$$

отсюда следует, что $x - \lambda e$ обратим в F тогда и только тогда, когда

$$p(q-\lambda)p + (e-p) = (P_+^{(n)}(\chi_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)})^\pi + J_t, \tag{6.7}$$
$$(e-p)(e-q-\lambda)(e-p) + p = (P_+^{(n)} + P_-^{(n)}(1-\lambda-\chi_t)P_-^{(n)})^\pi + J_t \tag{6.8}$$

обратимы в F. Следовательно, $\operatorname{sp} x = S_1 \cup S_2$, где

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : (6.7) \text{ необратим в } F\}, \\ S_2 &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : (6.8) \text{ необратим в } F\}. \end{aligned}$$

По теореме 6.1

$$\begin{aligned}
&\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (P_+^{(n)}(\chi_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)})^\pi \text{ необратим в } \mathfrak{B}^\pi\} \\
&= \bigcup_{\tau\in\Gamma}\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (P_+^{(n)}(\chi_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)})^\pi + J_\tau \text{ необратим в } \mathfrak{B}^\pi/J_\tau\}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Функция χ_t может быть выбрана непрерывной на $\Gamma\backslash\{t\}$ и удовлетворяющей условию

$$\chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cap \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M) = \emptyset. \tag{6.10}$$

Тогда из определения J_τ следует

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{\tau\in\Gamma\backslash\{t\}}\{\lambda \in \mathbb{C} : (P_+^{(n)}(\chi_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)})^\pi + J_\tau \text{ необратим в } \mathfrak{B}^\pi/J_\tau\} \\
&= \bigcup_{\tau\in\Gamma\backslash\{t\}}\{\chi_t(\tau)\} = \chi_t(\Gamma\backslash\{t\}).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (P_+^{(n)}(\chi_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)})^\pi \text{ необратим в } \mathfrak{B}^\pi\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ P_+^{(n)}(\chi_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)} \text{ не нетеров в } L_M^n(\Gamma)\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ P_+(\chi_t - \lambda)P_+ + P_- \text{ не нетеров в } L_M(\Gamma)\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (\chi_t - \lambda)P_+ + P_- \text{ не нетеров в } L_M(\Gamma)\}.
\end{aligned}$$

По теореме 5.7

$$\begin{aligned}
&\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (\chi_t - \lambda)P_+ + P_- \text{ не нетеров в } L_M(\Gamma)\} \\
&= \chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \ \cup \ \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{S}(0-\lambda, 1-\lambda; \delta(t); \alpha_M, \beta_M)\} \\
&= \chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \ \cup \ \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M).
\end{aligned}$$

Отсюда и из, (6.9), (6.11) следует, что

$$\chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cup \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M) = \chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cup S_1. \tag{6.12}$$

Тогда, принимая во внимание (6.10), получим

$$\mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M) \subset S_1. \tag{6.13}$$

Обратно, пусть $\tilde{\chi}_t$ обладает всеми свойствами χ_t, т.е. пусть $\tilde{\chi}_t$ непрерывна на $\Gamma\backslash\{t\}$, $\tilde{\chi}_t(t-0) = 0$, $\tilde{\chi}_t(t+0) = 1$,

$$\tilde{\chi}_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cap \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M) = \emptyset,$$

предположим, что

$$\tilde{\chi}_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cap \chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) = \emptyset. \tag{6.14}$$

Из (6.12) вытекает, что

$$S_1 \subset \chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cup \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M). \tag{6.15}$$

Аналогично,

$$\tilde{S}_1 \subset \tilde{\chi}_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cup \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M), \tag{6.16}$$

где

$$\tilde{S}_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : (P_+^{(n)}(\tilde{\chi}_t - \lambda)P_+^{(n)} + P_-^{(n)})^\pi + J_t \text{ необратим в } \mathfrak{B}^\pi/J_t\}.$$

Так как выполнено (6.14), то из определения J_t следует, что $\tilde{S}_1 = S_1$. Таким образом, из (6.14), (6.15), (6.16) мы получаем

$$\begin{aligned} S_1 &\subset [\tilde{\chi}_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cup \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)] \cap [\chi_t(\Gamma\backslash\{t\}) \cup \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)] \\ &= \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Окончательно, из (6.13) и (6.17) вытекает, что $S_1 = \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$. Аналогично можно доказать, что $S_2 = \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$. Таким образом, $\operatorname{sp} x = S_1 \cup S_2 = \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$. ■

6.5. Символьное исчисление

Сейчас мы получим наши основные результаты: символьное исчисление и критерий нетеровости для алгебры $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}$. Заметим, что для пространств Лебега следующая теорема получена в случае ляпуновских кривых И.Ц.Гохбергом и Н.Я.Крупником [3, 4], а в случае карлесоновских кривых, удовлетворяющих условию (2.1) А.Беттчером и Ю.И.Карловичем [23].

Определим пучек спиралевидных рожков

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\Gamma,M} := \bigcup_{t\in\Gamma}(\{t\} \times \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)).$$

Теорема 6.3. *(a) для каждой точки $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$ отображение*

$$\sigma_{t,\mu} : \{(aI^{(n)})^\pi : a \in PC^{n\times n}(\Gamma)\} \cup \{(P_+^{(n)})^\pi\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

определенное формулами

$$\sigma_{t,\mu}(aI^{(n)})^\pi = \left(\begin{array}{cc} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu) + a(t-0)\mu \end{array}\right), \tag{6.18}$$

$$\sigma_{t,\mu}(P_+^{(n)})^\pi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.19}$$

где E – единичная $n \times n$ матрица, продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр:

$$\sigma_{t,\mu} : \mathfrak{A}^\pi \to \mathbb{C}^{2n\times 2n};$$

(b) оператор $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в $L_M^n(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\det \sigma_{t,\mu} A^\pi \neq 0$ *для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$;*

(c) алгебра $\mathfrak{A}^\pi$ обратимо замкнута в алгебре Калкина $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ и отображение

$$\sigma : \mathfrak{A}^\pi \to \bigoplus_{(t,\mu)\in\mathfrak{M}} \mathbb{C}^{2n\times 2n}, \quad A^\pi \to (\sigma_{t,\mu}A^\pi)_{(t,\mu)\in\mathfrak{M}} \tag{6.20}$$

является символьным отображением.

Доказательство. Фиксируем $t \in \Gamma$. Очевидно, что $cP_+^{(n)} = P_+^{(n)}cI^{(n)}$ и $c\chi_t I^{(n)} = \chi_t c I^{(n)}$ для любой матрицы $c \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно, $cp = pc$ и $cq = qc$, где p и q – два проектора в алгебре $F = \mathfrak{B}^\pi/J_t$, определенные формулами (6.3).

По лемме 6.2

$$\operatorname{sp} x = \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M).$$

где оператор x определен формулой (6.6). Таким образом, мы можем применить теорему 6.2 о двух проекторах.

По теореме 6.2 (a) для каждого $\mu \in \mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$ отображение $\sigma_\mu = \sigma_{t,\mu}$, определенное формулами (6.18) и (6.19), продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр $W_t \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$.

Из (6.2) вытекает, что если $a \in PC^{n\times n}(\Gamma)$, то

$$\sigma_{t,\mu}(aI^{(n)})^\pi = \sigma_{t,\mu}(a_t I^{(n)})^\pi =$$

$$a(t-0)\begin{pmatrix} (1-\mu)E & -\sqrt{\mu(1-\mu)}E \\ -\sqrt{\mu(1-\mu)}E & \mu E \end{pmatrix} +$$

$$a(t+0)\begin{pmatrix} \mu E & \sqrt{\mu(1-\mu)}E \\ \sqrt{\mu(1-\mu)}E & (1-\mu)E \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu) + a(t-0)\mu \end{pmatrix}.$$

Нетеровость оператора $A \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ в $L_M^n(\Gamma)$ эквивалентна обратимости A^π в алгебре $\mathfrak{B}^\pi$. По теореме 6.1 это эквивалентно обратимости $A^\pi + J_t$ в фактор-алгебре $\mathfrak{B}^\pi/J_t$ для всех $t \in \Gamma$. По теореме 6.2 последнее утверждение эквивалентно выполнению условия $\det \sigma_{t,\mu}A^\pi \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$.

Так как $\mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$ не разделяет плоскость, то спектр (6.6) в алгебрах $F = \mathfrak{B}^\pi/J_t$ и W_t совпадает. По теореме 6.2 (c) алгебра $W_t = frakA^\pi/J_t$ обратимо замкнута в $F = \mathfrak{B}^\pi/J_t$ и отображение

$$\sigma_t : W_t \to \bigoplus_{\mu\in sp\, x} \mathbb{C}^{2n\times 2n}, \quad A^\pi + J_t \to (\sigma_{t,\mu}A^\pi)_{\mu\in sp\, x}$$

является символьным отображением.

Применяя локальный принцип Аллана-Дугласа (теорема 6.1) к алгебрам $\mathfrak{A}^\pi$ и $\mathfrak{B}^\pi$ с центральной подалгеброй $Z = \mathrm{alg}(C^\pi)$, получим, что $\mathfrak{A}^\pi$ обратимо замкнута в $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ и (6.20) является символьным отображением. ■

В заключении автор хотел бы выразить благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н. Диденко В.Д. за внимание к работе, профессору А.Беттчеру за обсуждение результатов и ценные замечания, а также своему отцу – профессору Карловичу Ю.И. за внимание к работе и постоянную поддержку.

Литература

[1] Э.Г.Гордадзе, *О сингулярных интегралах с ядром Коши*, Труды Тбилис. мат. инст. им. Размадзе Акад. Наук Груз. ССР **42** (1972) 5-17.

[2] И.Ц.Гохберг, Н.Я.Крупник, *Спектр сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p*, Studia Math. **31** (1968) 347-362.

[3] И.Ц.Гохберг, Н.Я.Крупник, *Об алгебре, порожденной одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно непрерывными коэффициентами*, Функ. анализ и его прилож. **4** (1970), вып. 3, 26-36.

[4] И.Ц.Гохберг, Н.Я.Крупник, *Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами и их символы*, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. **35** (1971) 940-964.

[5] И.Ц.Гохберг, Н.Я.Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев, 1973.

[6] Е.А.Данилов, *Краевая задача Римана на контурах неограниченной закрученности*, Канд. дисс., Одесса, 1984.

[7] С.С.Казарян, *Неравенства для одной максимальной функции в пространствах Орлича*, Изв. Акад. Наук Арм. ССР. Сер. Мат., **22** (1987) 358-377.

[8] А.Ю.Карлович, *Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивных пространствах Орлича*, Доклады РАН, принята к печати.

[9] В.М.Кокилашвили, *Сингулярные интегралы с ядром Коши в весовых пространствах Орлича*, Докл. расшир. засед. семин. Инст. прикл. матем. им. И.Н.Векуа (Тбилиси), **1** (1985) N 1, 110-113.

[10] В.М.Кокилашвили, М.Крбец, *Об ограниченности анизотропных дробных максимальных функций и потенциалов в весовых пространствах Орлича*, Труды Тбилис. мат. инст. им. Размадзе Акад. Наук Груз. ССР **82** (1986) 106-115.

[11] М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, Москва, 1958.

[12] С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, Москва, 1978.

[13] А.И.Маркушевич, *Теория аналитических функций*, том 2, Наука, Москва, 1968.

[14] Н.И.Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, Москва, 1968.

[15] И.И.Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, Москва, Ленинград, 1950.

[16] Р.К.Сейфуллаев, *Краевая задача Римана на негладкой разомкутой кривой*, Матем. сборник **112** (1980) 147-161.

[17] И.Б.Симоненко, *Новый общий метод изучения линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений*, Часть 1: Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. **29** (1965) 567-586. Часть 2: Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. **29** (1965) 757-782.

[18] И.Б.Симоненко, *Некоторые общие вопросы в теории краевой задачи Римана*, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. **32** (1968) 1138-1146.

[19] И.Я.Шнейберг, *О разрешимости линейных уравнений в интерполяционных шкалах банаховых пространств*, Докл. Акад. Наук СССР **212** (1973) 57-59.

[20] И.Я.Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Мат. исслед., Кишинев **9** (1974) N 2, 214-229.

[21] A.V.Ajzenshtat, Yu.I.Karlovich, G.S.Litvinchuk, *The method of conformal gluing for the Haseman boundary value problem on an open contour*, to appear in Complex Variables.

[22] C.Bennett, R.Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, London, 1988.

[23] A. Böttcher, Yu.I.Karlovich, *Toeplitz and singular integral operators on Carleson curves with logarithmic whirl points*, to appear in Integr. Equat. and Oper. Theory.

[24] A. Böttcher, B.Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Akademie Verlag, Berlin, 1989, and Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[25] D.W.Boyd, *Spaces between a pair reflexive Lebesgue spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967) 215-219.

[26] D.W.Boyd, *The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces*, Can. J. Math. **19** (1967) 599-616.

[27] D.W.Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Can. J. Math. **21** (1969) 1245-1254.

[28] D.W.Boyd, *Indices for the Orlicz spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971) 315-323.

[29] A.P.Calderon, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. **24** (1964) 113-190.

[30] L.A.Coburn, *Weyl's theorem for non-normal operators*, Michigan Math. J. **13** (1966) 285-286.

[31] G.David, *L'integrale de Cauchy sur le courbes rectifiables*, Prepublication Univ. Paris-Sud, Dept. Math. 82T05, 1982.

[32] G.David, *Operáteurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Super. **17** (1984) 157-189.

[33] T.Finck, S.Roch, B.Silbermann, *Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra*, Math. Nachr. **162** (1993) 167-185.

[34] I.Gohberg, N.Krupnik, *Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols*, Integr. Equat. and Oper. Theory **17** (1993) 514-529.

[35] I.Gohberg, N.Krupnik, I.Spitkovsky, *Banach algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients. General contour and weight*, Integr. Equat. and Oper. Theory **17** (1993) 322-337.

[36] J.Gustavsson, J.Peetre, *Interpolation of Orlicz spaces*, Studia Math. **60** (1977) 33-59.

[37] D.Herrero, *One-sided interpolation of Fredholm operators*, Proc. Roy. Irish. Acad., A, **89** (1989) no. 1, 79-89.

[38] J.Lindenstrauss, L.Tzafriri, *Classical Banach Spaces. Function Spaces*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1979.

[39] I.Spitkovsky, *Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights*, J. Funct. Analysis **105** (1992) 129-143.

[40] D.Yaohua, *Singular integral equations in Orlicz spaces (1)*, Acta Math. Sci. **3** (1983) no. 1, 71-83.

[41] D.Yaohua, *Singular integral equations in Orlicz spaces (2)*, Acta Math. Sci. **9** (1989) no. 2, 215-226.