УДК 517.983:517.968

ОБ ИНДЕКСЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

А. Ю. Карлович

1. Введение

В работах И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника начала 70-х годов получены критерии нетеровости и формулы для вычисления индекса операторов из банаховой алгебры, порожденной сингулярными интегральными операторами (СИО) с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах Лебега $L_2^n(\Gamma)$ [1] и $L_p^n(\Gamma,\rho)$ [2]. Ограничения, которые накладывались на вес ρ и кривую Γ (рассматривался степенной вес ρ и ляпуновская кривая Γ), были связаны с известными на то время достаточными условиями ограниченности в пространствах Лебега $L_p(\Gamma,\rho), 1<p<\infty$, оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши

$$(S\varphi)(t):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma(t,\varepsilon)}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\quad t\in\Gamma, \tag{1}$$

где $\Gamma(t,\varepsilon):=\{\tau\in\Gamma:|t-\tau|<\varepsilon\}$. Г. Давид доказал [3], что оператор S ограничен в пространстве $L_p(\Gamma), 1<p<\infty$, тогда и только тогда, когда Γ является кривой Карлесона, т.е.

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon}|\Gamma(t,\varepsilon)|<\infty, \tag{2}$$

где $|\Gamma(t,\varepsilon)|$ – мера порции $\Gamma(t,\varepsilon)$. Из этого результата и обзора Е. М. Дынькина и Б. П. Осиленкера [4] следует (см., например, [5,6]), что для ограниченности оператора S в весовом пространстве Лебега $L_p(\Gamma,\rho), 1<p<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы вес ρ удовлетворял условию Макенхаупта

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\rho^p(\tau)|d\tau|\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\rho^{-q}(\tau)|d\tau|\right)^{1/q}<\infty, \tag{3}$$

где $1/p+1/q=1$. Согласно неравенству Гельдера (3) влечет (2). Автором с использованием критерия Г. Давида ограниченности оператора S в пространствах $L_p(\Gamma)$ и интерполяции линейных операторов показано [7, теорема 3.6], что для ограниченности оператора S в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ также необходимо и достаточно, чтобы Γ была кривой Карлесона.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Из леммы 3 работы Р. К. Сейфуллаева [8] следует, что для всех точек $t \in \Gamma$ кривая Карлесона удовлетворяет условию

$$\arg(\tau - t) = O(-\log|\tau - t|), \quad \tau \to t \quad (\tau \in \Gamma).$$

В работе А. Беттчера и Ю. И. Карловича [5] получен критерий нетеровости для операторов из банаховой алгебры СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в пространстве Лебега $L_p(\Gamma, \rho)$, где ρ – вес Макенхаупта, а Γ – замкнутая жорданова кривая Карлесона, во всех точках $t \in \Gamma$ удовлетворяющая дополнительному условию

$$\arg(\tau - t) = -\delta(t)\log|\tau - t| + O(1), \quad \tau \to t, \tag{4}$$

где $\delta : \Gamma \to \mathbb{R}$. В дальнейшем такие кривые будем называть логарифмическими кривыми Карлесона. В работе автора [7] при тех же предположениях относительно кривой Γ получен критерий нетеровости для операторов из банаховой алгебры СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном пространстве Орлича $L_M^n(\Gamma)$. Отметим также, что недавно в работах [6,9] при изучении алгебры СИО в весовых пространствах Лебега ограничение (4) на кривую Карлесона было снято.

Для получения этих результатов широко использовались мощные современные средства изучения банаховых алгебр – теорема о двух проекторах [10,11] и локальный принцип Аллана-Дугласа (см., например, [12, раздел 1.34]). Эти средства позволяют построить символьное исчисление для банаховой алгебры, порожденной СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами, если до этого изучен "канонический" СИО со специальным скалярным кусочно непрерывным коэффициентом, ассоциированный с краевой задачей Римана. Однако эти методы не позволяют решить задачу о вычислении индекса оператора из указанной алгебры.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [7], вычисляется индекс оператора из алгебры СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном пространстве Орлича $L_M^n(\Gamma)$ на логарифмической кривой Карлесона Γ.

2. Пространства Орлича и индексы Бойда

Основные сведения из теории пространств Орлича приведены, например, в [13-15].

Функцией Юнга называется выпуклая непрерывная функция $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которой $M(0) = 0$, $M(x) > 0$ при $x > 0$,

$$\lim_{x \to +0} \frac{M(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{M(x)} = 0.$$

Дополнительной к функции M называется функция Юнга

$$N(x) := \max_{y \geq 0}\{xy - M(y)\}.$$

Пусть Γ – логарифмическая кривая Карлесона, ориентированная против часовой стрелки. Пространством Орлича $L_M(\Gamma)$ называется множество всех измеримых на Γ комплекснозначных функций u, для каждой из которых при некотором $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\int_\Gamma M\left(\frac{|u(\tau)|}{\lambda}\right)\,|d\tau| < \infty.$$

Пространство $L_M(\Gamma)$ снабдим нормой Орлича

$$\|u\|_M := \sup\left\{\int_\Gamma |u(\tau)v(\tau)|\,|d\tau| \ : \ \int_\Gamma N(|v(\tau)|)\,|d\tau| \le 1\right\},$$

относительно этой нормы пространство $L_M(\Gamma)$ является банаховым.

В. Матушевска и В. Орлич [16] (см. также [15,17]) связали с пространством $L_M(\Gamma)$ пару индексов. В общем случае перестановочно инвариантных пространств в работе Д. Бойда [18] были введены новые индексы, совпадающие с величинами, обратными к индексам Матушевской-Орлича в случае пространств $L_M(\Gamma)$. Нижний и верхний индексы Бойда α_M и β_M определяются следующим образом

$$\alpha_M = \sup_{t>1}\Theta(t) = \lim_{t\to+\infty}\Theta(t) \quad \beta_M = \inf_{0<t<1}\Theta(t) = \lim_{t\to+0}\Theta(t),$$

где $\Theta(t) = -\log h(t)/\log t$, и для пространств Орлича [19]

$$h(t) = \limsup_{x\to+\infty}\frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t > 0.$$

Индексы Бойда являются важными интерполяционными и геометрическими характеристиками перестановочно инвариантного пространства $L_M(\Gamma)$ (см. [14–19]). Например, пространство Орлича $L_M(\Gamma)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда

$$0 < \alpha_M \le \beta_M < 1.$$

Пространство Орлича, порожденное функцией Юнга $x^p/p, 1 < p < \infty$, изоморфно пространству Лебега $L_p(\Gamma)$. Индексы Бойда пространства $L_p(\Gamma)$, где $1 < p < \infty$, совпадают и равны $1/p$. Примеры функций Юнга, порождающих рефлексивные пространства Орлича, не изоморфные пространствам Лебега, для которых индексы Бойда совпадают (различны) приведены, например, в [15, с. 93].

3. Критерий нетеровости

Линейный ограниченный оператор A в банаховом пространстве X называется нетеровым, если его образ замкнут в X и конечны дефектные числа $n(A) := \dim\operatorname{Ker} A,\ d(A) := \dim\operatorname{Ker} A^*$. В этом случае индексом оператора A называется число

$$\operatorname{Ind} A := n(A) - d(A).$$

Будем обозначать через $L_M^n(\Gamma)$ прямую сумму n копий рефлексивного пространства Орлича $L_M(\Gamma)$. Через $\mathcal{L} := \mathcal{L}(L_M^n(\Gamma))$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов в $L_M^n(\Gamma)$, а через $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L_M^n(\Gamma))$ – идеал компактных операторов в $\mathcal{L}$.

Рассмотрим банахову алгебру $C(\Gamma)$ всех непрерывных функций на Γ, пусть $\Lambda(\Gamma)$ – множество функций непрерывных в каждой точке контура Γ, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых эти функции имеют конечные односторонние пределы. Замыкание множества $\Lambda(\Gamma)$ по норме $L_\infty(\Gamma)$ образует банахову алгебру $PC(\Gamma)$ всех кусочно непрерывных функций на Γ.

Пусть $C^{n\times n}(\Gamma)$ $(\Lambda^{n\times n}(\Gamma), PC^{n\times n}(\Gamma), L_\infty^{n\times n}(\Gamma))$ – множество $n \times n$ матриц-функций, элементы которых принадлежат $C(\Gamma)$ $(\Lambda(\Gamma), PC(\Gamma), L_\infty(\Gamma))$.

Пусть I – тождественный оператор, а оператор S определен в пространстве $L_M^n(\Gamma)$ покомпонентно формулой (1). Рассмотрим наименьшую банахову подалгебру $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathcal{L}$, содержащую операторы умножения на кусочно непрерывные матрицы-функции и оператор S. Сформулируем критерий нетеровости оператора из $\mathfrak{A}$ (см. [7]) в удобной для нас форме.

Пусть даны два действительных числа a, b, удовлетворяющие неравенству $0 < a \le b < 1$, два комплексных числа z, w и действительное число δ. Определим спиралевидный рожок [5]

$$\mathcal{S}(z, w; \delta; a, b) := \{z, w\} \cup \\ \left\{ u \in \mathbb{C} \setminus \{z, w\} : \frac{1}{2\pi} \left(\arg \frac{u - z}{u - w} - \delta \log \left| \frac{u - z}{u - w} \right| \right) \in [a, b] \right\}.$$

Здесь значение $\arg(\cdot)$ выбирается так, чтобы $\arg(\cdot) - \delta \log|\cdot| \in [0, 2\pi)$. Легко видеть, что имеет место равенство

$$\mathcal{S}(z, w; \delta; a, b) = \{z(1-\mu) + w\mu : \mu \in \mathcal{S}(0, 1; \delta; a, b)\}. \tag{5}$$

Согласно [5] (двойную) логарифмическую спираль $\mathcal{S}(z, w; \delta; a, a)$ можно задать параметрически в виде

$$\mathcal{S}(z, w; \delta; a, a) := \left\{ \xi = \frac{w e^{\psi(1+i\delta)} e^{2\pi i a} - z}{e^{\psi(1+i\delta)} e^{2\pi i a} - 1} : \psi \in [-\infty, +\infty] \right\}.$$

Определим "массивный цилиндр"

$$\mathfrak{N} := \Gamma \times [0, 1] \times [\alpha_M, \beta_M].$$

Между "пучком спиралевидных рожков"

$$\mathfrak{S} := \bigcup_{t \in \Gamma} \Big(\{t\} \times \mathcal{S}(0, 1; \delta(t); \alpha_M, \beta_M) \Big),$$

где $\delta(t)$ описывает степень закрученности кривой Γ в точке t (см. (4)), и множеством $\mathfrak{N}$ можно установить биекцию по правилу

$$\mathcal{F} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{S}, \quad \mathcal{F}(t, x, \lambda) = (t, f(t, x, \lambda)), \tag{6}$$

где

$$f(t,x,\lambda)=\frac{e^{\varphi(t,x,\lambda)}}{e^{\varphi(t,x,\lambda)}-1},\quad \varphi(t,x,\lambda)=(1+i\delta(t))\log\frac{x}{1-x}+2\pi i\lambda.$$

Для $a\in PC^{n\times n}(\Gamma)$ введем матрицы-функции

$$\begin{aligned}U_a(t,x,\lambda)&:=a(t+0)f(t,x,\lambda)+a(t-0)\Big(1-f(t,x,\lambda)\Big),\\ V_a(t,x,\lambda)&:=a(t+0)\Big(1-f(t,x,\lambda)\Big)+a(t-0)f(t,x,\lambda),\\ W_a(t,x,\lambda)&:=\Big(a(t+0)-a(t-0)\Big)\sqrt{f(t,x,\lambda)(1-f(t,x,\lambda))},\end{aligned}$$

где в каждой точке $(t,x,\lambda)\in\mathfrak{N}$ выбирается произвольное фиксированное значение корня.

Теорема 1. *(а) $\mathcal{K}\subset\mathfrak{A}\subset\mathcal{L}$ и фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратимо замкнута (наполнена) в алгебре Калкина $\mathcal{L}/\mathcal{K}$, т.е. если произвольный элемент $A+\mathcal{K}\in\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратим в алгебре $\mathcal{L}/\mathcal{K}$, то $(A+\mathcal{K})^{-1}\in\mathfrak{A}/\mathcal{K}$;*

(б) для каждой точки $(t,x,\lambda)\in\mathfrak{N}$ отображение

$$\omega_{t,x,\lambda}:\big\{aI:a\in PC^{n\times n}(\Gamma)\big\}\cup\{S\}\to\mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

определяемое равенствами

$$\omega_{t,x,\lambda}(aI)=\begin{pmatrix}U_a(t,x,\lambda)&W_a(t,x,\lambda)\\ W_a(t,x,\lambda)&V_a(t,x,\lambda)\end{pmatrix},\quad \omega_{t,x,\lambda}(S)=\begin{pmatrix}E&O\\ O&-E\end{pmatrix},$$

где O и E – нулевая и единичная $n\times n$ матрицы, расширяется до (непрерывного) гомоморфизма

$$\omega_{t,x,\lambda}:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}^{2n\times 2n}$$

банаховых алгебр, ядро которого содержит идеал $\mathcal{K}$;

(в) оператор $A\in\mathfrak{A}$ нетеров в $L^n_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\det\omega_{t,x,\lambda}(A)\neq 0\quad \textit{для всех}\quad (t,x,\lambda)\in\mathfrak{N}.$$

Доказательство. Вложение $\mathcal{K}\subset\mathfrak{A}$ доказано в [7, лемма 9.1]. Так как (6) является биекцией $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{S}$, то

$$\omega_{t,x,\lambda}(A)=\sigma_{t,\mu}(A+\mathcal{K})\quad\text{для всех}\quad (t,x,\lambda)\in\mathfrak{N},\tag{7}$$

где $\mu=f(t,x,\lambda)\in\mathcal{S}(0,1;\delta(t);\alpha_M,\beta_M)$, а гомоморфизм $\sigma_{t,\mu}:\mathfrak{A}/\mathcal{K}\to\mathbb{C}^{2n\times 2n}$ для $(t,\mu)\in\mathfrak{S}$ введен в теореме 9.5 [7]. Тогда $\omega_{t,x,\lambda}(K)=0$ для любого $K\in\mathcal{K}$. Ввиду (7) остальные утверждения теоремы 1 вытекают из теоремы 9.5 [7]. $\square$

4. Символ и его детерминант

Матрицу-функцию $\mathcal{A}(t,x,\lambda) = \omega_{t,x,\lambda}(A)$ при $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$ будем называть символом оператора $A \in \mathfrak{A}$. Представим его в виде

$$\mathcal{A}(t,x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(t,x,\lambda) & \mathcal{A}_{12}(t,x,\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(t,x,\lambda) & \mathcal{A}_{22}(t,x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad (t,x,\lambda) \in \mathfrak{N},$$

где $\mathcal{A}_{ij}(t,x,\lambda)$ – $n \times n$ матрицы-функции.

В пространстве $L^n_M(\Gamma)$ рассмотрим проекторы $P_\pm := (I \pm S)/2$. Обозначим

$$K := \left(\max\{\|P_+\|_{\mathcal{L}}, \|P_-\|_{\mathcal{L}}\}\right)^2.$$

Семейство гомоморфизмов $\omega_{t,x,\lambda}$, вообще говоря, не является равномерно ограниченным по $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. Однако этим свойством обладают функции $\det \mathcal{A}$, $\det \mathcal{A}_{ii} (i = 1,2)$. Более точно, если обозначить через

$$|A| := \inf_{T \in \mathcal{K}} \|A + T\|_{\mathcal{L}}$$

существенную норму оператора $A \in \mathcal{L}$ (т.е. норму класса смежности $A + \mathcal{K}$ в алгебре Калкина $\mathcal{L}/\mathcal{K}$), а через

$$\|a\| := \sup_{(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}} |a(t,x,\lambda)|$$

– sup-норму функции $a : \mathfrak{N} \to \mathbb{C}$, то имеют место следующие теоремы:

Теорема 2. *Если $A \in \mathfrak{A}$, то*

$$\|\det \mathcal{A}\| \le (2n)!(K|A|)^{2n}, \qquad \|\det \mathcal{A}_{ii}\| \le n!(K|A|)^n \quad (i = 1,2).$$

Теорема 3. *Пусть последовательность операторов $A_s \in \mathfrak{A}$ равномерно сходится к оператору A, и $\mathcal{A}^{(s)}$ – последовательность символов операторов A_s. Тогда последовательность функций $\det \mathcal{A}^{(s)}$ ($\det \mathcal{A}^{(s)}_{11}$, $\det \mathcal{A}^{(s)}_{22}$) равномерно сходится на множестве $\mathfrak{N}$ к функции $\det \mathcal{A}$ (соответственно, к функции $\det \mathcal{A}_{11}$, $\det \mathcal{A}_{22}$).*

Для доказательства теорем 2 и 3 потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через v_i диагональную матрицу размерности $n \times n$, у которой элемент, стоящий на i-ом месте равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Операторы

$$\begin{aligned} Z_1(A;i,j) &:= P_+ v_i A v_j P_+, \quad & Z_2(A;i,j) &:= P_+ v_i A v_j P_-, \\ Z_3(A;i,j) &:= P_- v_i A v_j P_+, \quad & Z_4(A;i,j) &:= P_- v_i A v_j P_-, \end{aligned}$$

где $1 \le i,j \le n$, будем называть элементарными операторами, ассоциированными с оператором A.

Лемма 4. *Пусть операторы* $A, B \in \mathfrak{A}$, *пусть*

$$A_l = Z_k(A; i, j), \quad B_l = Z_k(B; i, j), \quad l = \overline{1, m},$$

где тройка $\{i, j, k\}$ *зависит от* l *и* $1 \leq k \leq 4, 1 \leq i, j \leq n$. *Тогда*

$$|A_1 A_2 \dots A_m - B_1 B_2 \dots B_m| \leq K^m |A - B| \sum_{l=1}^{m} |B|^{l-1} |A|^{m-l}. \tag{8}$$

Доказательство. По индукции доказывается, что

$$|A_1 A_2 \dots A_m - B_1 B_2 \dots B_m| \leq \sum_{l=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{l-1} |B_j| \cdot |A_l - B_l| \cdot \prod_{j=l+1}^{m} |A_j| \right). \tag{9}$$

Пусть $1 \leq l \leq m$. Тогда с учетом определения постоянной K

$$|A_l - B_l| = |Z_k(A; i, j) - Z_k(B; i, j)| = |Z_k(A - B; i, j)| \leq K |A - B|. \tag{10}$$

Следовательно, $|A_l| \leq K|A|, |B_l| \leq K|B|$. Отсюда и из неравенств (9), (10) вытекает неравенство (8). $\square$

Обозначим через $J(a; i, j)$ матрицу размерности $2n \times 2n$, у которой элемент, стоящий в i строке и j столбце, равен a, а все остальные элементы равны нулю. Представим символ $\mathcal{A}$ произвольного оператора $A \in \mathfrak{A}$ в виде

$$\mathcal{A}(t, x, \lambda) = \Big(a_{ij}(t, x, \lambda) \Big)_{i,j=1}^{2n}, \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}.$$

Вычислим символы элементарных операторов ($1 \leq i, j \leq n$):

$$\begin{aligned}
\Big(\mathcal{Z}_1(A; i, j) \Big)(t, x, \lambda) &= J(1; i, i) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j, j) \\
&= J(a_{ij}(t, x, \lambda); i, j), && (11) \\
\Big(\mathcal{Z}_2(A; i, j) \Big)(t, x, \lambda) &= J(1; i, i) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j + n, j + n) \\
&= J(a_{i,j+n}(t, x, \lambda); i, j + n), && (12) \\
\Big(\mathcal{Z}_3(A; i, j) \Big)(t, x, \lambda) &= J(1; i + n, i + n) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j, j) \\
&= J(a_{i+n,j}(t, x, \lambda); i + n, j), && (13) \\
\Big(\mathcal{Z}_4(A; i, j) \Big)(t, x, \lambda) &= J(1; i + n, i + n) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j + n, j + n) \\
&= J(a_{i+n,j+n}(t, x, \lambda); i + n, j + n). && (14)
\end{aligned}$$

Таким образом, матрицы вида $J(a_{ij}(t, x, \lambda); i, j)$, где $a_{ij}(t, x, \lambda)$ – (i, j)-элемент символа $\mathcal{A}(t, x, \lambda)$, также являются символами операторов из алгебры $\mathfrak{A}$.

Лемма 5. *Пусть A – оператор из алгебры $\mathfrak{A}$, символ которого имеет вид*

$$\mathcal{A}(t,x,\lambda)=J(a(t,x,\lambda);i,i),\quad (t,x,\lambda)\in\mathfrak{N},\quad 1\le i\le 2n.$$

Тогда $\|a\|\le|A|$.

Доказательство. Идея доказательства заимствована из [2, теорема 4.1]. Допустим, что существует точка $(t_0,x_0,\lambda_0)\in\mathfrak{N}$, для которой $|A|<|a(t_0,x_0,\lambda_0)|$. В этом случае $|A|/|a(t_0,x_0,\lambda_0)|<1$. Тогда оператор $B=I-(a(t_0,x_0,\lambda_0))^{-1}A$ нетеров, а его символ – диагональная матрица

$$\mathcal{B}(t,x,\lambda)=\operatorname{diag}\left\{1,\dots,1,1-\frac{a(t,x,\lambda)}{a(t_0,x_0,\lambda_0)},1,\dots,1\right\},$$

где на i месте стоит элемент $1-a(t,x,\lambda)/a(t_0,x_0,\lambda_0)$. Следовательно,

$$\det\mathcal{B}(t_0,x_0,\lambda_0)=1-a(t_0,x_0,\lambda_0)/a(t_0,x_0,\lambda_0)=0,$$

что противоречит теореме 1(в). □

Лемма 6. *Если $A,B\in\mathfrak{A}$, то $\|a_{ii}-b_{ii}\|\le K|A-B|$ для всех $i=\overline{1,2n}$.*

Доказательство. Если $1\le i\le n$, то из леммы 5 и равенств (11), (14) вытекает

$$\|a_{ii}-b_{ii}\|\le|Z_1(A-B;i,i)|,\quad \|a_{i+n,i+n}-b_{i+n,i+n}\|\le|Z_4(A-B;i,i)|.$$

Применив к правым частям последних двух неравенств лемму 4 при $m=1$, получим требуемое утверждение. □

Обозначим через $\mathfrak{S}_{2n}$ симметрическую группу перестановок степени $2n$. Пусть даны различные натуральные числа $1\le p_1<\dots<p_m\le 2n$. Циклом $(p_1,\dots,p_m)\in\mathfrak{S}_{2n}$ называется перестановка, действующая по правилу: элементы, отличные от p_i, $i=\overline{1,m}$, переходят в себя; p_i переходит в p_{i+1}, $i=\overline{1,m-1}$, а p_m переходит в p_1. Число m называется длиной цикла. Обозначим

$$C_{A,(p_1,\dots,p_m)}(t,x,\lambda):=a_{p_1p_2}(t,x,\lambda)\cdot\ldots\cdot a_{p_{m-1}p_m}(t,x,\lambda)\cdot a_{p_mp_1}(t,x,\lambda).$$

Лемма 7. *Если $A,B\in\mathfrak{A}$ и $(p_1,\dots,p_m)\in\mathfrak{S}_{2n}$ – цикл длины m, то*

$$\|C_{A,(p_1,\dots,p_m)}-C_{B,(p_1,\dots,p_m)}\|\le K^m|A-B|\sum_{l=1}^{m}|B|^{l-1}|A|^{m-l}.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$J(a_{p_1p_2}(t,x,\lambda);p_1,p_2)\cdot\ldots\cdot J(a_{p_{m-1}p_m}(t,x,\lambda);p_{m-1},p_m)\times \times J(a_{p_mp_1}(t,x,\lambda);p_m,p_1)=J(C_{A,(p_1,\dots,p_m)}(t,x,\lambda);p_1,p_1),\tag{15}$$

$$J(b_{p_1p_2}(t,x,\lambda);p_1,p_2)\cdot\ldots\cdot J(b_{p_{m-1}p_m}(t,x,\lambda);p_{m-1},p_m)\times \times J(b_{p_mp_1}(t,x,\lambda);p_m,p_1)=J(C_{B,(p_1,\dots,p_m)}(t,x,\lambda);p_1,p_1).\tag{16}$$

Каждая матрица, стоящая в левой части равенства (15) (соответственно, (16)), является символом элементарного оператора $A_l, l = \overline{1,m}$ (соответственно, B_l), ассоциированного с оператором A (соответственно, B) по формулам (11) – (14). В итоге, из равенств (15), (16) вытекает, что

$$J(C_{A,(p_1,\dots,p_m)}(t,x,\lambda) - C_{B,(p_1,\dots,p_m)}(t,x,\lambda); p_1, p_1) \\ = \omega_{t,x,\lambda}\left(A_1A_2\dots A_m - B_1B_2\dots B_m\right).$$

По лемме 5

$$||C_{A,(p_1,\dots,p_m)} - C_{B,(p_1,\dots,p_m)}|| \le |A_1A_2\dots A_m - B_1B_2\dots B_m|.$$

Применив к правой части последнего неравенства лемму 4, получим требуемое утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 3. Из выражения определителя через элементы матрицы вытекает, что

$$\left\|\det\mathcal{A} - \det\mathcal{A}^{(s)}\right\| \le \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{2n}} \left\|\prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} - \prod_{j=1}^{2n} a^{(s)}_{ji_j}\right\|, \tag{17}$$

где $i_j = \pi(j)$. Перестановку $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$, отличную от тождественной, разложим в произведение независимых циклов:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{2n}\end{pmatrix} = \left(p_1^{(1)},\dots,p^{(1)}_{m(1)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_1^{(r)},\dots,p^{(r)}_{m(r)}\right), \tag{18}$$

где r – число циклов, $m(l)$ – длина l-го цикла. Обозначим через k число элементов, остающихся на месте под действием перестановки π. Очевидно,

$$k = 2n - \sum_{l=1}^{r} m(l). \tag{19}$$

Для тождественной перестановки $r = 0, k = 2n$. Рассмотрим множество

$$\{q_1,\dots,q_k\} := \{1,\dots,2n\}\setminus\bigcup_{l=1}^{r}\left\{p_1^{(l)},\dots,p^{(l)}_{m(l)}\right\}.$$

Обозначим

$$C_l(t,x,\lambda) := C_{A,\left(p_1^{(l)},\dots,p^{(l)}_{m(l)}\right)}(t,x,\lambda), \quad C_l^{(s)}(t,x,\lambda) := C_{A_s,\left(p_1^{(l)},\dots,p^{(l)}_{m(l)}\right)}(t,x,\lambda).$$

Аналогично (9) оценим каждое слагаемое, стоящее в формуле (17) справа:

$$\left\|\prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} - \prod_{j=1}^{2n} a^{(s)}_{ji_j}\right\| = \left\|\prod_{l=1}^{r} C_l\cdot\prod_{l=1}^{k} a_{q_lq_l} - \prod_{l=1}^{r} C_l^{(s)}\cdot\prod_{l=1}^{k} a^{(s)}_{q_lq_l}\right\|$$
$$\le \prod_{l=1}^{r}\left\|C_l^{(s)}\right\|\cdot\sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\left\|a^{(s)}_{q_jq_j}\right\|\cdot\left\|a_{q_lq_l} - a^{(s)}_{q_lq_l}\right\|\cdot\prod_{j=l+1}^{k}\|a_{q_jq_j}\|\right)$$
$$+\prod_{l=1}^{k}\|a_{q_lq_l}\|\cdot\sum_{l=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\left\|C_j^{(s)}\right\|\cdot\left\|C_l - C_l^{(s)}\right\|\cdot\prod_{j=l+1}^{r}\|C_j\|\right). \tag{20}$$

Так как последовательность A_s равномерно сходится к A, то $|A_s| \le 2|A|$ начиная с некоторого номера s_0. Тогда для всех $s \ge s_0$ из леммы 6 при $j = \overline{1,k}$ следует, что

$$\left\| a_{q_j q_j} - a^{(s)}_{q_j q_j} \right\| \le K|A - A_s|, \quad \left\| a_{q_j q_j} \right\| \le K|A|, \quad \left\| a^{(s)}_{q_j q_j} \right\| \le 2K|A|. \tag{21}$$

Из леммы 7 для всех $l = \overline{1,r}$ вытекает оценка:

$$\left\| C_l - C_l^{(s)} \right\| \le K^{m(l)} |A - A_s| \sum_{j=1}^{m(l)} |A_s|^{j-1} |A|^{m(l)-j}.$$

Тогда для всех $s \ge s_0$ и всех $l = \overline{1,r}$

$$\|C_l\| \le (K|A|)^{m(l)}, \quad \left\| C_l^{(s)} \right\| \le (K|A_s|)^{m(l)} \le (2K|A|)^{m(l)}, \tag{22}$$

$$\left\| C_l - C_l^{(s)} \right\| \le \left(2^{m(l)} - 1 \right) K^{m(l)} |A|^{m(l)-1} |A - A_s|. \tag{23}$$

В итоге, из неравенств (20) – (23) с учетом равенства (19) вытекает, что

$$\left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{j i_j} - \prod_{j=1}^{2n} a^{(s)}_{j i_j} \right\| \le \left(2^{2n-k} \sum_{l=1}^{k} 2^{l-1} + \sum_{l=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{l-1} 2^{m(j)} \cdot \left(2^{m(l)} - 1 \right) \right) \right) \times$$
$$\times K^{2n} |A|^{2n-1} |A - A_s| = \left(2^{2n} - 1 \right) K^{2n} |A|^{2n-1} |A - A_s|. \tag{24}$$

Из неравенств (17) и (24) получаем:

$$\left\| \det \mathcal{A} - \det \mathcal{A}^{(s)} \right\| \le (2n)! \left(2^{2n} - 1 \right) K^{2n} |A|^{2n-1} |A - A_s|. \tag{25}$$

Осталось показать, что последовательности функций $\det \mathcal{A}_{ii}^{(s)} (i = 1, 2)$ равномерно сходятся к функциям $\det \mathcal{A}_{ii}$, соответственно. Пусть, например, $i = 2$. Рассмотрим последовательность операторов $B_s := P_+ + P_- A_s P_-$, равномерно сходящуюся к оператору $B := P_+ + P_- A P_-$. Так как $\det \mathcal{B} = \det \mathcal{A}_{22}$, $\det \mathcal{B}^{(s)} = \det \mathcal{A}_{22}^{(s)}$, то равномерная сходимость $\det \mathcal{A}_{22}^{(s)} \to \det \mathcal{A}_{22}$ вытекает из (25). $\square$

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$\|\det \mathcal{A}\| \le \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} \left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{j i_j} \right\|. \tag{26}$$

Если перестановка π разлагается в произведение (18), то согласно доказательству теоремы 3

$$\left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{j i_j} \right\| \le \prod_{l=1}^{r} \|C_l\| \cdot \prod_{j=1}^{k} \|a_{q_j q_j}\|,$$

$$\|C_l\| \le (K|A|)^{m(l)}, \qquad \|a_{q_j q_j}\| \le K|A|.$$

Отсюда ввиду (26) и (19)

$$\|\det \mathcal{A}\| \le \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} (K|A|)^{2n} = (2n)! (K|A|)^{2n}.$$

Неравенство для блоков $\mathcal{A}_{ii} (i = 1, 2)$ доказывается аналогично. $\square$

5. Формула индекса

Рассмотрим цилиндр $\mathfrak{M} = \Gamma \times [0,1]$. Согласно [1,2] введем на $\mathfrak{M}$ топологию следующим образом. Определим окрестности

$$\Omega(t,0) := \{(\tau,x) \in \mathfrak{M} : |\tau - t| < \delta, \tau \prec t, x \in [0,1]\} \cup \{(t,x) \in \mathfrak{M} : x \in [0,\varepsilon)\},$$
$$\Omega(t,1) := \{(\tau,x) \in \mathfrak{M} : |\tau - t| < \delta, t \prec \tau, x \in [0,1]\} \cup \{(t,x) \in \mathfrak{M} : x \in (\varepsilon,1]\},$$
$$\Omega(t,x_0) := \{(t,x) \in \mathfrak{M} : x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)\},$$

где $x_0 \neq 0,1$, $0 < \delta_1 < x_0$, $0 < \delta_2 < 1 - x_0$, $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим функцию

$$F(t,x,\lambda) := \prod_{j=1}^{k} U_{a_j}(t,x,\lambda), \quad (t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}, \tag{27}$$

где $a_j \in \Lambda(\Gamma)$, $j = \overline{1,k}$, $k \geq 1$. Допустим, что $F(t,x,\lambda) \neq 0$ для всех $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. Зафиксируем $\lambda \in [\alpha_M, \beta_M]$. Несложно видеть, что функция $F(\cdot,\cdot,\lambda)$ непрерывна на цилиндре $\mathfrak{M}$. Образ этой функции – непрерывная замкнутая кривая, не проходящая через нуль, которую можно естественным образом ориентировать: в точках непрерывности функций a_j движение по кривой определяется изменением t по контуру Γ в положительном направлении, а вдоль дополнительных спиралей, соединяющих точки разрыва функций a_j, движение определяется изменением x от 0 до 1. Определим индекс функции F как число оборотов описанной выше кривой вокруг начала координат. Так как семейство функций $F(\cdot,\cdot,\lambda)$ непрерывно по λ, то введенный индекс не зависит от $\lambda \in [\alpha_M, \beta_M]$. Будем обозначать его $\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} F$.

Обозначим $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ класс функций $H : \mathfrak{N} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $H(t,x,\lambda) \neq 0$ для всех $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$;

(ii) функция H представима в виде равномерного предела по $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$ последовательности функций F_s вида (27).

Так как цилиндр $\mathfrak{M}$ является компактом, то в случае выполнения условия (ii) функция $H(\cdot,\cdot,\lambda)$ непрерывна на цилиндре $\mathfrak{M}$ при любом $\lambda \in [\alpha_M, \beta_M]$. Начиная с некоторого номера s_0, числа $\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} F_s$ не зависят от s. Индексом функции $H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ назовем

$$\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} H := \lim_{s \to \infty} \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} F_s.$$

Легко видеть, что так определенный индекс не зависит от от выбора последовательности функций F_s вида (27). Отметим, что введенный индекс обладает естественным логарифмическим свойством: если $F, H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, то $FH \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, при этом

$$\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} FH = \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} F + \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} H.$$

Для доказательства формулы индекса нам потребуются некоторые вспомогательные факты.

Лемма 8. *Пусть* $a, b \in L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$. *Если оператор* $aP_+ + bP_-$ *нетеров в* $L_M^n(\Gamma)$, *то*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} |\det a(t)| > 0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} |\det b(t)| > 0.$$

Это утверждение доказывается по аналогии с леммой 2 [20].

Непрерывная матрица-функция на кривой Γ называется неособенной, если она невырожденна в каждой точке $t \in \Gamma$. Пусть $a \in L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$, обозначим

$$R_a := aP_+ + P_-.$$

Лемма 9. *Пусть* $G \in C^{n\times n}(\Gamma)$. *Если оператор* R_G *нетеров, то*

$$\operatorname{Ind} R_G = -\frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg}\det G(t)\}_\Gamma.$$

Доказательство. Если оператор R_G нетеров, то по лемме 8 $\det G(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Значит матрица-функция $G(t)$ гомотопна матрице-функции $\tilde{G}(t) = \operatorname{diag}\{t^\varkappa, 1, \dots, 1\}$, где $\varkappa = \frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg}\det G(t)\}_\Gamma$ – индекс Коши (см. Добавление VI Б. Боярского в [21, с. 484–486]). По теореме об устойчивости индекса нетерова оператора $\operatorname{Ind} R_G = \operatorname{Ind} R_{\tilde{G}}$. Очевидно, что $\operatorname{Ind} R_{\tilde{G}} = \operatorname{Ind}(t^\varkappa P_+ + P_-) = -\varkappa$. $\square$

Теорема 10. *Пусть* $G \in PC(\Gamma)$. *Оператор* R_G *нетеров в рефлексивном пространстве Орлича* $L_M(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда* $U_G(t, x, \lambda) \neq 0$ *для всех* $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. *Если оператор* R_G *нетеров, то функция* $U_G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$,

$$\operatorname{Ind} R_G = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} U_G.$$

Теорема 10 вытекает из теоремы 8.7 [7] и равенства (5).

Теорема 11. *Пусть* $G \in \Lambda^{n\times n}(\Gamma)$. *Если оператор* R_G *нетеров в* $L_M^n(\Gamma)$, *то функция* $\det U_G$ *представима в виде* (27) *и принадлежит классу* $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$,

$$\operatorname{Ind} R_G = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} \det U_G.$$

Доказательство. Так как оператор R_G нетеров, то по теореме 1(в) его символ

$$\mathcal{R}_G(t, x, \lambda) = \begin{pmatrix} U_G(t, x, \lambda) & O \\ W_G(t, x, \lambda) & E \end{pmatrix}$$

обратим, т.е. $\det \mathcal{R}_G(t, x, \lambda) = \det U_G(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$.

По лемме 8 $\det G(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Тогда по лемме 2 [22] матрица-функция G представима в виде

$$G(t) = C_1(t) Y(t) C_2(t),$$

где $C_i,\ i = 1, 2$ – непрерывные неособенные матрицы-функции, $Y \in \Lambda^{n\times n}(\Gamma)$ – верхнетреугольная матрица-функция с диагональными элементами $y_j,\ j = \overline{1, n}$. Легко видеть, что в этом случае

$$\det U_G(t, x, \lambda) = \det C_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{n} U_{y_j}(t, x, \lambda) \cdot \det C_2(t). \tag{28}$$

Так как $C_i \in C^{n\times n}(\Gamma)$, $i = 1, 2$, то, очевидно,

$$\det C_i(t) = U_{\det C_i}(t, x, \lambda), \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}.$$

Потому функция $\det U_G$ имеет вид (27) и принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$. Для непрерывных на Γ функций введенный в начале параграфа индекс совпадает с индексом Коши:

$$\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} \det C_i = \frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg} \det C_i(t)\}_\Gamma, \quad i = 1, 2. \tag{29}$$

Так как $\det U_G(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$, то из равенства (28) вытекает, что $U_{y_j}(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $j = \overline{1, n}$ и $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. По теореме 10 операторы R_{y_j} нетеровы,

$$\operatorname{Ind} R_{y_j} = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} U_{y_j}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Из результатов о нетеровости блочных операторов (см., например, [23]) следует, что оператор R_Y нетеров и его индекс вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind} R_Y = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind} R_{y_j}. \tag{31}$$

Несложно доказать, что

$$\operatorname{Ind} R_G = \operatorname{Ind} R_{C_1} + \operatorname{Ind} R_Y + \operatorname{Ind} R_{C_2}. \tag{32}$$

Действительно, по теореме 1(в) операторы $R_{C_i}, i = 1, 2$ нетеровы. Так как $R_G = (P_+GP_+ + P_-)(I + P_-GP_+)$, где оператор $I + P_-GP_+$ обратим: $(I + P_-GP_+)^{-1} = I - P_-GP_+$, то оператор R_G нетеров тогда и только тогда, когда оператор $P_+GP_+ + P_-$ нетеров, причем

$$\operatorname{Ind} R_G = \operatorname{Ind}(P_+GP_+ + P_-). \tag{33}$$

Из леммы 5.6 [7] следует, что если $a \in C^{n\times n}(\Gamma)$, то операторы $aP_\pm - P_\pm aI$ компактны, потому справедливо равенство

$$(P_+C_1P_+ + P_-)(P_+YP_+ + P_-)(P_+C_2P_+ + P_-) = P_+GP_+ + P_- + K,$$

где $K \in \mathcal{K}$. Отсюда и из (33) вытекает (32).

Из леммы 9 и равенств (28)–(32) следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind} R_G &= \operatorname{Ind} R_{C_1} + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind} R_{y_j} + \operatorname{Ind} R_{C_2} \\ &= -\left(\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} \det C_1 + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} U_{y_j} + \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} \det C_2\right) \\ &= -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} \det U_G. \quad \square\end{aligned}$$

Теорема 12. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в $L^n_M(\Gamma)$, тогда функция*

$$Q(t,x,\lambda) = \frac{\det \mathcal{A}(t,x,\lambda)}{\det \mathcal{A}_{22}(t,0,\lambda) \det \mathcal{A}_{22}(t,1,\lambda)}$$

принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} Q. \tag{34}$$

Доказательство. Доказательство проведем в три этапа.

1) Пусть $A = aP_+ + bP_-$, где $a, b \in \Lambda^{n\times n}(\Gamma)$. Если оператор A нетеров в $L^n_M(\Gamma)$, то по лемме 8 $\det b(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Тогда оператор $R_{b^{-1}a}$ нетеров, $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} R_{b^{-1}a}$. По аналогии с леммой 1.1 [1] или леммой 2.1 [2] доказывается, что

$$\det \mathcal{A}(t,x,\lambda) = \det U_{b^{-1}a}(t,x,\lambda) \det \mathcal{A}_{22}(t,0,\lambda) \det \mathcal{A}_{22}(t,1,\lambda).$$

Отсюда и из теоремы 11 следует, что функция $Q = \det U_{b^{-1}a}$ имеет вид (27) и принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$,

$$\operatorname{Ind} R_{b^{-1}a} = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} \det U_{b^{-1}a} = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} Q.$$

2) Пусть

$$A = \sum_{j=1}^{k} A_{j1} A_{j2} \dots A_{jr}, \tag{35}$$

где $A_{jl} = a_{jl}P_+ + b_{jl}P_-$, $a_{jl}, b_{jl} \in \Lambda^{n\times n}(\Gamma), l = \overline{1,r}, k \geq 1$, и оператор A нетеров. Этот случай сводится к предыдущему с помощью процедуры линейного растяжения точно так же, как и в теореме 7.1 [1] или теореме 3.1 [2]. Таким образом, в этом случае функция Q представима в виде (27) и принадлежит $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, при этом справедлива формула индекса (34).

3) Пусть A – произвольный нетеров оператор из алгебры $\mathfrak{A}$, тогда по теореме 1(в) $\det \mathcal{A}(t,x,\lambda) \neq 0$ для любого $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. По теореме 2 функция $\det \mathcal{A}_{22}(t,x,\lambda)$ равномерно ограничена по $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $Q(t,x,\lambda) \neq 0$ для всех $(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. Оператор A является равномерным пределом нетеровых операторов A_s вида (35) с символами $\mathcal{A}^{(s)}$. Согласно теореме 3 последовательности $\det \mathcal{A}^{(s)}(t,x,\lambda), \det \mathcal{A}^{(s)}_{22}(t,x,\lambda)$ равномерно сходятся на $\mathfrak{N}$ к функциям $\det \mathcal{A}(t,x,\lambda), \det \mathcal{A}_{22}(t,x,\lambda)$, соответственно. Тогда последовательность функций

$$Q_s(t,x,\lambda) = \frac{\det \mathcal{A}^{(s)}(t,x,\lambda)}{\det \mathcal{A}^{(s)}_{22}(t,0,\lambda) \det \mathcal{A}^{(s)}_{22}(t,1,\lambda)}$$

равномерно сходится к функции $Q(t,x,\lambda)$ на множестве $\mathfrak{N}$. Как было отмечено выше в этапе 2), функции Q_s представимы в виде (27). Тогда $Q \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, и по определению индекса функции из класса $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$

$$\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} Q = \lim_{s\to\infty} \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} Q_s.$$

В итоге,

$$\operatorname{Ind} A = \lim_{s\to\infty} \operatorname{Ind} A_s = -\lim_{s\to\infty} \operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} Q_s = -\operatorname{ind}_{\mathfrak{N}} Q. \quad \square$$

Список цитированной литературы

1. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я., *Об алгебре, порожденной одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно непрерывными коэффициентами*, Функ. анализ и его прилож. **4** (1970), no. 3, 26–36.
2. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я., *Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами и их символы*, Изв. АН СССР, сер. матем. **35** (1971), no. 4, 940–964.
3. David G., *Operáteurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Super. **17** (1984), 157–189.
4. Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П., *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения*, Итоги науки и техники ВИНИТИ, Мат. анализ **21** (1983), 42-129.
5. Böttcher A., Karlovich Yu. I., *Toeplitz and singular integral operators on Carleson curves with logarithmic whirl points*, Integr. Equat. and Oper. Theory **22** (1995), 127–161.
6. Böttcher A., Karlovich Yu. I., *Toeplitz and singular integral operators on general Carleson Jordan curves*, Operator Theory. Advances and Applications **90** (1996), 119–152.
7. Karlovich A. Yu., *Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces*, Math. Nachr. **179** (1996), 187–222.
8. Сейфуллаев Р. К., *Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой*, Матем. сб. **112,** (1980), no. 2, 147–161.
9. Böttcher A., Karlovich Yu. I., *Submultiplicative functions and spectral theory of Toeplitz operators*, Integral Transforms and Special Functions **4** (1996), no. 1-2, 181–202.
10. Finck T., Roch S., Silbermann B., *Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra*, Math. Nachr. **162** (1993), 167–185.
11. Gohberg I., Krupnik N., *Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols*, Integr. Equat. and Oper. Theory **17** (1993), 514–529.
12. Böttcher A., Silbermann B., *Analysis of Toeplitz Operators*, Akademie Verlag, Berlin, 1989; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
13. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, Москва, 1958.
14. Bennett C., Sharpley R., *Interpolation of Operators*, Academic Press, London, Boston, 1988.
15. Maligranda L., *Orlicz spaces and interpolation*, Sem. Math. 5, Dep. Mat., Univ. Estadual de Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989.
16. Matuszewska W., Orlicz W., *On certain properties of φ-functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math. aster. et phys. **8** (1960), no. 7, 439–443.
17. Maligranda L., *Indices and interpolation*, Dissert. Math. **234** (1985), 1–49.
18. Boyd D. W., *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Can. J. Math. **21** (1969), 1245–1254.
19. Boyd D. W., *Indices for the Orlicz spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 315–323.
20. Симоненко И. Б., *Некоторые общие вопросы в теории краевой задачи Римана*, Изв. АН СССР, сер. матем. **32** (1968), no. 5, 1138–1146.
21. Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, Москва, 1968.
22. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я., *Системы сингулярных интегральных уравнений в пространствах L_p с весом*, Докл. АН СССР **186** (1969), no. 5, 998–1002.
23. Спитковский И. М., *О блочных операторах и связанных с ними вопросах теории факторизации матриц-функций*, Докл. АН СССР **254** (1980), no. 4, 816–820.

Южно-Украинский педагогический университет им. К. Д. Ушинского, физико-математический факультет, Украина, 270020, Одесса, ул. Старопортофранковская 26.

E-mail address: alex@karlik.imem.odessa.ua