УДК 517.983:517.968 Математика

А.Ю.Карлович

Об алгебре сингулярных интегральных операторов в рефлексивных пространствах Орлича на кривых Карлесона

Настоящая работа посвящена изучению банаховой алгебры сингулярных интегральных операторов с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивных пространствах Орлича $L^n_M(\Gamma)$ на кривой Карлесона Γ. Полученные результаты примыкают к исследованиям И.М.Спитковского [11], А.Беттчера и Ю.И.Карловича [3, 4] сингулярных интегральных операторов в весовых пространствах Лебега на кривых Карлесона.

Функцией Юнга называется выпуклая непрерывная функция $M:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $M(0)=0, M(x)>0$ при $x>0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{M(x)}=0.$$

Дополнительной к функции M называется функция Юнга

$$N(x):=\max_{y\geq 0}\{xy-M(y)\}.$$

Будем называть кривую на плоскости жордановой (простой), если она гомеоморфна окружности. Пусть Γ – спрямляемая жорданова кривая, снабженная мерой Лебега $|d\tau|$ и ориентированная против часовой стрелки. Пространством Орлича $L_M(\Gamma)$ называется множество всех измеримых на Γ комплекснозначных функций u, для каждой из которых при некотором $\lambda>0$ выполняется неравенство $\int\limits_\Gamma M(|u(\tau)|/\lambda)\,|d\tau|<\infty$. Пространство $L_M(\Gamma)$ снабдим нормой Орлича:

$$\|u\|_M:=\sup\left\{\int_\Gamma|u(\tau)v(\tau)|\,|d\tau|\ :\ \int_\Gamma N(|v(\tau)|)\,|d\tau|\leq 1\right\},$$

относительно этой нормы пространство $L_M(\Gamma)$ является банаховым.

Важными интерполяционными и геометрическими характеристиками пространств Орлича являются индексы Бойда (см., например, [9, 10]). Рассмотрим функцию

$$g(x) := \limsup_{y\to\infty} \frac{M^{-1}(y)}{M^{-1}(x^{-1}y)}, \quad x \in (0,\infty),$$

где M^{-1} – функция, обратная к M. *Индексами Бойда* пространства Орлича называются величины

$$\alpha_M := \lim_{x\to 0} \frac{\log g(x)}{\log x}, \quad \beta_M := \lim_{x\to\infty} \frac{\log g(x)}{\log x}.$$

Лемма 1. *(см., например, [9, теор. 3.2(b)]). Пространство Орлича $L_M(\Gamma)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$.*

Пространство Орлича, порожденное функцией Юнга $M(x) = x^p$, $1 < p < \infty$, изоморфно пространству Лебега $L_p(\Gamma)$. Индексы Бойда пространства $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, совпадают и равны $1/p$. Примеры функций Юнга, порождающих рефлексивные пространства Орлича, не изоморфные пространствам Лебега, для которых индексы Бойда совпадают (различны) приведены в [10, с. 93].

Для $\varphi \in L_1(\Gamma)$ полагаем

$$(S\varphi)(t) := \lim_{R\to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma\setminus\Gamma(t,R)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

где $\Gamma(t,R) := \{\tau \in \Gamma \ : \ |\tau - t| < R\}$. Из теоремы Давида [5] об ограниченности оператора S в пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, применяя технику интерполяции линейных операторов, несложно получить следующий результат.

Теорема 1. *(см. [8, теор. 3.6]). Оператор S ограничен в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда Γ является кривой Карлесона, т.е. $\sup_{t\in\Gamma}\sup_{R>0} |\Gamma(t,R)|/R < \infty$, где $|\Gamma(t,R)|$ – длина (мера) порции $\Gamma(t,R)$.*

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что Γ – жорданова кривая Карлесона, $L_M(\Gamma)$ – рефлексивное пространство Орлича.

Зафиксируем произвольную точку $t \in \Gamma$ и выберем произвольную непрерывную ветвь $\arg(\tau - t)$ на $\Gamma \backslash \{t\}$. Согласно [1] любая кривая Карлесона Γ удовлетворяет условию

$$\arg(\tau - t) = O(-\log|\tau - t|), \quad \tau \to t.$$

Полагаем $\eta_t(\tau) := e^{-\arg(\tau - t)}$ при $\tau \in \Gamma \backslash \{t\}$,

$$\rho_t(x) := \limsup_{R \to 0} \left(\max_{\tau \in \Gamma, |\tau - t| = xR} \eta_t(\tau) \Big/ \min_{\tau \in \Gamma, |\tau - t| = R} \eta_t(\tau) \right), \quad x \in (0, \infty).$$

Лемма 2. *(см. [3, лемма 6.4]). Для каждой точки $t \in \Gamma$ существуют пределы*

$$\delta_t^- := \lim_{x \to 0} \frac{\log \rho_t(x)}{\log x}, \quad \delta_t^+ := \lim_{x \to \infty} \frac{\log \rho_t(x)}{\log x},$$

причем $-\infty < \delta_t^- \le \delta_t^+ < +\infty$.

Числа $\delta_t^{\pm}$ называются *индексами логарифмической спиралевидности кривой Γ в точке $t \in \Gamma$*. Кривая Карлесона Γ называется *логарифмической*, если для каждой точки $t \in \Gamma$ существует $\delta_t \in \mathbb{R}$, для которого

$$\arg(\tau - t) = -\delta_t \log|\tau - t| + O(1), \quad \tau \to t.$$

В этом случае $\delta_t^- = \delta_t^+ = \delta_t$. Пример кривой Карлесона, не являющейся логарифмической, т.е. кривой, для которой $\delta_t^- < \delta_t^+$ приведен в [3].

Зафиксируем $t \in \Gamma$ и $k \in (0, 1)$. Положим

$$\Delta(t, R) := \{\tau \in \Gamma \, : \, kR \le |\tau - t| < R\}, \quad \text{где} \quad 0 < R \le \max_{\tau \in \Gamma} |\tau - t|.$$

Пусть функция $\psi : \Gamma \setminus \{t\} \to (0, \infty)$ непрерывна. Определим функцию

$$(Q_t \psi)(x) := \limsup_{R \to 0} \frac{\|\psi \chi_{\Delta(t, xR)}\|_M \|\psi^{-1} \chi_{\Delta(t, R)}\|_N}{|\Delta(t, R)|}, \quad x \in (0, \infty),$$

где $\chi_{\Delta(t,R)}$ – характеристическая функция порции $\Delta(t, R)$.

Теорема 2. *(i) Для всех $x \in \mathbb{R}$ существуют конечные пределы*

$$\alpha_t(x) := \lim_{y \to 0} \frac{\log(Q_t \eta_t^x)(y)}{\log y}, \quad \beta_t(x) := \lim_{y \to \infty} \frac{\log(Q_t \eta_t^x)(y)}{\log y},$$

которые будем называть индикаторными функциями $L_M(\Gamma)$;

(ii) $\alpha_t(0) = \alpha_M, \quad \beta_t(0) = \beta_M$*;*

(iii) функция α_t *– вогнута, функция* β_t *– выпукла;*

(iv) для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\alpha_t(x) + \alpha_t^0(y) \le \alpha_t(x+y) \le \min\{\alpha_t(x) + \beta_t^0(y), \beta_t(x) + \alpha_t^0(y)\},$$

$$\beta_t(x) + \beta_t^0(y) \ge \beta_t(x+y) \ge \max\{\alpha_t(x) + \beta_t^0(y), \beta_t(x) + \alpha_t^0(y)\},$$

где

$$\alpha_t^0(x) := \min\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}, \quad \beta_t^0(x) := \max\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}.$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta$ – действительные числа, удовлетворяющие следующим условиям: $\delta_1 \le \delta_2,\ 0 < \alpha \le \beta < 1$. Рассмотрим множество

$$Y(\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta) :=$$
$$\Big\{\gamma = x + iy \in \mathbb{C} \ :\ \alpha + \min\{\delta_1 x, \delta_2 x\} \le y \le \beta + \max\{\delta_1 x, \delta_2 x\}\Big\}.$$

Для $z, w \in \mathbb{C}$ положим

$$\mathcal{L}(z, w; \delta_1, \delta_2; \alpha, \beta) := \{z, w\} \cup \left\{\xi = \frac{we^{2\pi\gamma} - z}{e^{2\pi\gamma} - 1} : \gamma \in Y(\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta)\right\}.$$

По терминологии [4] множество $\mathcal{L}(z, w; \delta_1, \delta_2; \alpha, \beta)$ является *логарифмическим листом.*

Рассмотрим проекторы $P_\pm := (I \pm S)/2$. Для функции $a \in L_\infty(\Gamma)$ определим сингулярный интегральный оператор

$$R_a := aP_+ + P_-.$$

Обозначим через $PC(\Gamma)$ банахову алгебру кусочно непрерывных функций: функция $a \in L_\infty(\Gamma)$ принадлежит $PC(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $t \in \Gamma$ существуют односторонние пределы

$$a(t \pm 0) := \lim_{\tau \to t \pm 0} a(\tau).$$

Существенным спектром оператора R_a называется множество

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}\, R_a := \{\lambda \in \mathbb{C} : R_a - \lambda I \quad \text{не нетеров в} \quad L_M(\Gamma)\}.$$

Описание этого спектра базируется на локальном принципе И.Ц.Гохберга-Н.Я.Крупника (см. [2, гл. 1]), критерии нетеровости R_a в терминах факторизации коэффициента [8, теор. 5.6] и устанавливаемых в терминах индексов Бойда и индикаторных функций α_t, β_t условий ограниченности в пространстве $L_M(\Gamma)$ оператора $w_{t,\gamma} S w_{t,\gamma}^{-1} I$, где

$$w_{t,\gamma}(\tau) := |(\tau - t)^\gamma|, \quad t \in \Gamma, \quad \gamma \in \mathbb{C}, \quad \tau \in \Gamma \setminus \{t\}.$$

Теорема 3. *Пусть для всех $t \in \Gamma$ и $x \in \mathbb{R}$*

$$(1) \quad \alpha_t(x) = \alpha_M + \min\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}, \quad \beta_t(x) = \beta_M + \max\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}.$$

Если $a \in PC(\Gamma)$, то

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}\, R_a = a(\Gamma \setminus \Lambda_a) \cup \bigcup_{t \in \Lambda_a} \mathcal{L}(a(t-0), a(t+0); \delta_t^-, \delta_t^+; \alpha_M, \beta_M),$$

где $\Lambda_a := \{t \in \Gamma : a(t-0) \neq a(t+0)\}$. В случае нетеровости $\mathrm{Ind}\, R_a = -\mathrm{wind}\, a^{\#}_{\Gamma,M}$, где $\mathrm{wind}\, a^{\#}_{\Gamma,M}$ означает число витков вокруг нуля замкнутой непрерывной и естественно ориентированной кривой

$$a^{\#}_{\Gamma,M} := a(\Gamma \setminus \Lambda_a) \cup \bigcup_{t \in \Lambda_a} \mathcal{L}(a(t-0), a(t+0); \varphi_t, \varphi_t; \gamma, \gamma)$$

с фиксированными $\varphi_t \in [\delta_t^-, \delta_t^+], \gamma \in [\alpha_M, \beta_M]$.

Из теоремы 2 следует, что условие (1) выполняется, если $\alpha_M = \beta_M$ или кривая Карлесона является логарифмической.

Путь $\mathfrak{B}$ – алгебра линейных ограниченных операторов в $L_M^n(\Gamma)$, $\mathcal{K}$ – идеал компактных операторов в $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ банахову алгебру, порожденную операторами умножения на кусочно непрерывные матрицы-функции $a \in PC^{n\times n}(\Gamma)$ и оператором $S^{(n)} := \mathrm{diag}\,\{S, \ldots, S\}$.

Исследование алгебры $\mathfrak{A}$ основано на применении локального принципа Аллана-Дугласа (см. [2, гл. 1]), теоремы о двух идемпотентах [6, 7] и теоремы 3, и проводится по аналогии с [3, 4, 8].

Теорема 4. *(Символьное исчисление для сингулярных интегральных операторов). Пусть для всех $t \in \Gamma$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено (1). Рассмотрим "пучок логарифмических листов"*

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{\Gamma,M} := \bigcup_{t \in \Gamma} \Big(\{t\} \times \mathcal{L}(0, 1; \delta_t^-, \delta_t^+; \alpha_M, \beta_M) \Big).$$

(а) $\mathcal{K} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ и фактор алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратимо замкнута (наполнена) в $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$;

(б) для каждой точки $(t, \mu) \in \mathfrak{M}$ отображение

$$\sigma_{t,\mu} \,:\, \{S^{(n)}\} \cup \{aI^{(n)} \,:\, a \in PC^{n\times n}(\Gamma)\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

определяемое равенствами

$$(2) \qquad \sigma_{t,\mu}(S^{(n)}) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{t,\mu}(aI^{(n)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu)+a(t-0)\mu \end{pmatrix},$$

где O и E – нулевая и единичная $n \times n$ матрицы, расширяется до (непрерывного) гомоморфизма $\sigma_{t,\mu} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ банаховых алгебр, ядро которого содержит идеал $\mathcal{K}$;

(в) оператор $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в $L^n_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\det \sigma_{t,\mu}(A) \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$.

В (2) под $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ понимается любое комплексное число, квадрат которого равен $\mu(1-\mu)$.

Для нетерова оператора $A \in \mathfrak{A}$ введем функцию

$$A_{\Gamma,M}(t,\mu) := \frac{\det \sigma_{t,\mu}(A)}{\det \sigma^{22}_{t,0}(A) \det \sigma^{22}_{t,1}(A)}, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M},$$

где $\sigma^{22}_{t,\mu}(A)$ – правый нижний $n \times n$ блок матрицы $\sigma_{t,\mu}(A)$. Через $A^{\#}_{\Gamma,M}$ обозначим непрерывную замкнутую естественно ориентированную кривую, получаемую из множества всех значений функции $A_{\Gamma,M}(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$ соединением точек $A_{\Gamma,M}(t \pm 0, 0)$ непрерывными кривыми

$$\{z = A_{\Gamma,M}(t,\mu) \,:\, \mu \in \mathcal{L}(0,1;\varphi_t,\varphi_t;\gamma,\gamma)\}$$

с фиксированными $\varphi_t \in [\delta^-_t, \delta^+_t]$, $\gamma \in [\alpha_M, \beta_M]$.

Теорема 5. *Пусть для всех $t \in \Gamma$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено (1). Если оператор $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в пространстве $L^n_M(\Gamma)$, то $0 \notin A_{\Gamma,M}(\mathfrak{M})$ и $\operatorname{Ind} A = -\operatorname{wind} A^{\#}_{\Gamma,M}$.*

Теоремы 4 и 5 обобщают результаты работ [3, 8].

Литература

1. Р.К. Сейфуллаев, *Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой*, Матем. сборник **112** (1980) №2, 147-161.

2. A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Akademie Verlag, Berlin, 1989, and Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

3. A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, *Toeplitz and singular integral operators on general Carleson Jordan curves*, Operator Theory: Advances and Applications **90** (1996) 119-152.

4. A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, *Toeplitz operators with PC symbols on general Carleson Jordan curves with arbitrary Muckenhoupt weights*, (to appear).

5. G. David, *Operáteurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Super **17** (1984) 157-189.

6. T. Finck, S. Roch, B. Silbermann, *Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra*, Math. Nachr. **162** (1993) 167-185.

7. I. Gohberg, N. Krupnik, *Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols*, Integr. Equat. and Oper. Theory **17** (1993) 514-529.

8. A.Yu. Karlovich, *Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces*, Math. Nachr. **179** (1996) 187-222.

9. L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissert. Math. **234** (1985) 1-49.

10. L. Maligranda, *Orlicz spaces and interpolation*, Sem. Math. 5, Dep. Mat., Univ. Estadual de Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989.

11. I. Spitkovsky, *Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights*, J. Funct. Analysis **105** (1992) 129-143.

Литература

[1] Р.К.Сейфуллаев, *Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой*, Матем. сборник **112** (1980) №2, 147-161.

[2] A.Böttcher, B.Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Akademie Verlag, Berlin, 1989, and Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[3] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, *Toeplitz and singular integral operators on general Carleson Jordan curves*, Operator Theory: Advances and Applications **90** (1996) 119-152.

[4] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, *Toeplitz operators with PC symbols on general Carleson Jordan curves with arbitrary Muckenhoupt weights*, (to appear).

[5] G.David, *Operáteurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Super **17** (1984) 157-189.

[6] T.Finck, S.Roch, B.Silbermann, *Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra*, Math. Nachr. **162** (1993) 167-185.

[7] I.Gohberg, N.Krupnik, *Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols*, Integr. Equat. and Oper. Theory **17** (1993) 514-529.

[8] A.Yu. Karlovich, *Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces*, (to appear).

[9] L.Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissert. Math. **234** (1985) 1-49.

[10] L.Maligranda, *Orlicz spaces and interpolation*, Sem. Math. 5, Dep. Mat., Univ. Estadual de Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989.

[11] I.Spitkovsky, *Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights*, J. Funct. Analysis **105** (1992) 129-143.