РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Карлович Алексей Юрьевич

АЛГЕБРЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КУСОЧНО НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ НА КРИВЫХ КАРЛЕСОНА

01.01.01 – математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

РОСТОВ-НА-ДОНУ

1998

Работа выполнена в Южно-Украинском государственном педагогическом университете им. К. Д. Ушинского (г. Одесса).

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Тарасенко А.А.

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,
профессор Симоненко И.Б.,
кандидат физико-математических наук,
доцент Деундяк В. М.

Ведущая организация: Воронежский государственный университет.

Защита состоится *9 июня* 1998 года в "____" часов на заседании диссертационного совета К 063.52.13 по физико-математическим наукам в РГУ по адресу 344090, Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 5, мехмат, ауд. 239.

С диссертацией можно познакомиться в научной библиотеке Ростовского государственного университета по адресу ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан ____________________ 1998 года.

Ученый секретарь диссертационного совета К 063.52.13 — канд. физ.-мат. наук, доцент Кряквин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель работы. Диссертация посвящена построению теории Нетера для банаховой алгебры сингулярных интегральных операторов с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в перестановочно инвариантных пространствах с весом на кривых Карлесона.

Актуальность темы. Сингулярные интегральные операторы (СИО) с кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах Лебега $L^p(\Gamma, w)$ со степенным весом на кривых Ляпунова были подробно исследованы в работах Б. В. Хведелидзе, Г. Видома, И. Б. Симоненко, И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника и других авторов. Один из основных качественных результатов теории И. Ц. Гохберга – Н. Я. Крупника состоит в том, что локальные спектры СИО имеют форму дуги окружности, зависящую от параметра p и показателей степенного веса.

В начале 90-х годов И. М. Спитковский обнаружил феномен появления массивных локальных спектров у СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах $L^p(\Gamma, w)$ на гладкой кривой Γ с весом Макенхаупта w: дуга окружности заменяется рожком, зависящим от p и веса. В 1994 году А. Беттчер и Ю. И. Карлович обнаружили еще один новый эффект: преобразование дуг окружностей и рожков в спирали и спиралевидные рожки при переходе от гладких кривых к кривым Карлесона, допускающим точки логарифмического завихрения. В 1995 году они доказали, что для произвольных кривых Карлесона в безвесовом случае спиралевидные рожки преобразуются в так называемые логарифмические листы, ограниченные кусками двойных логарифмических спиралей, а для произвольных кривых Карлесона и общих весов Макенхаупта локальные спектры СИО являются логарифмическими листами с “гало” (общими листами). Окончательные результаты о нетеровости СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах Лебега с весом Макенхаупта на кривых Карлесона (т.е. при тех необходимых и достаточных условиях на кривую и вес, при которых оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши ограничен в пространствах $L^p(\Gamma, w)$) изложены в монографии Böttcher A., Karlovich Yu. I. Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1997. – 416 p. Они получены сочетанием локальных методов, факторизационной техники и теории полумультипликативных функций, ассоциированных с кривой и весом.

В работах В. С. Рабиновича и А. Беттчера, Ю. И. Карловича, В. С. Рабиновича рассматривается также другой подход к исследованию СИО в весовых пространствах Лебега на кривых Карлесона, основанный на технике меллиновских псевдодифференциальных операторов и использовании предельных операторов. Он позволяет изучать СИО в ситуациях, когда коэффициенты, кривая и вес являются слабо осциллирующими.

Несмотря на то, что перестановочно инвариантные пространства (в частности, пространства Орлича) являются естественным обобщением пространств Лебега, известны лишь отдельные работы (Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я., 1968; Yaohua D., 1983), в которых рассматривались вопросы нетеровости СИО.

В случае перестановочно инвариантных пространств X исследование СИО с кусочно непрерывными коэффициентами осложняется наличием у X двух (вообще говоря, несовпадающих) интерполяционных характеристик – индексов Бойда α_X, β_X, которые для пространств Лебега $L^p(\Gamma)$ совпадают и равны $1/p$. Появление новых характеристик также приводит к массивным локальным спектрам СИО с кусочно непрерывными коэффициентами.

Одной из основных проблем при исследовании СИО в перестановочно инвариантных пространствах с весом является вопрос об ограниченности оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши. Отметим, что этот вопрос полностью решен для пространств Лебега с весом, в общем же случае вопрос открыт даже для пространств Орлича с весом.

Как уже отмечалось, к настоящему времени известно два подхода к исследованию СИО в весовых пространствах Лебега на кривых Карлесона: первый основан на сочетании факторизационных результатов и теории полумультипликативных функций, ассоциированных с кривой и весом, а второй использует технику меллиновских псевдодифференциальных операторов и метод предельных операторов. Однако для построения теории Нетера СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в перестановочно инвариантных пространствах с весом этих методов оказывается недостаточно.

Указанные обстоятельства определяют сложность и актуальность темы диссертации, в которой предпринята попытка с единых позиций взглянуть на три фактора, влияющих на массивность локального спектра СИО: пространство, вес, кривую.

Методика исследования. В диссертации применяются методы теории полумультипликативных функций и теории интерполяции линейных операторов, техника факторизации ограниченной измеримой функции и локальные принципы, а также другие методы теории банаховых алгебр, линейного функционального анализа и теории функций комплексного переменного.

Научная новизна и практическая ценность работы. Впервые исследуются сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами в перестановочно инвариантных пространствах с весом на кривых Карлесона. В связи с этим установлены следующие основные результаты:

1. Сформулирован аналог условия Макенхаупта $A_X(\Gamma)$ для перестановочно инвариантных пространств. Доказано, что для ограниченности оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши S в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$ необходимо, чтобы вес w удовлетворял введенному аналогу условия Макенхаупта. Отсюда, в частности, следует, что кривая Γ должна быть кривой Карлесона.

2. Развит аппарат полумультипликативных функций, ассоциированных с пространством, кривой и весом. В терминах индексов этих функций получены условия ограниченности оператора $\varphi_{t,\gamma} S \varphi_{t,\gamma}^{-1} I$, где $\varphi_{t,\gamma}(\tau) = |(\tau - t)^\gamma|, \gamma \in \mathbb{C}$, в перестановочно инвариантном пространстве с весом.

3. Построена теория Нетера ассоциированного с краевой задачей Римана СИО с измеримым ограниченным коэффициентом в рефлексив-

ном перестановочно инвариантном пространстве с весом в терминах соответствующей факторизации коэффициента.

4. Получены эффективные критерий нетеровости и формула индекса СИО с кусочно непрерывным коэффициентом в рефлексивном перестановочно инвариантном пространстве с весом при условии распадения индикаторных функций. Вычислен существенный спектр СИО в терминах существенного образа коэффициента и листов, дополняющих его в точках разрыва, а также описан его спектр.

5. Построена алгебра символов и в терминах символов установлены критерий нетеровости и формула для вычисления индекса для любого оператора из алгебры СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном перестановочно инвариантном пространстве с весом при условии распадения индикаторных функций.

Полученные результаты являются новыми. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут найти применение и развитие в теории сингулярных интегральных уравнений и алгебр линейных операторов с символами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором 1) дважды на семинаре по функциональному анализу и теории операторов в Техническом университете Хемниц-Цвиккау, руководитель – проф. Б. Зильберманн (Хемниц, ФРГ, январь, ноябрь 1994 г.); 2) дважды на семинаре по теории операторов в Высшем техническом институте Лиссабона, руководитель – проф. А. Ф. Сантуш (Лиссабон, Португалия, июль 1994 г., июль 1997 г.); 3) на семинаре по теории сингулярных интегральных уравнений в Одесском государственном университете, руководитель – проф. В. Д. Диденко (Одесса, март 1995 г.); 4) на семинаре по теории функций в Одесском государственном университете, руководитель – проф. Э. А. Стороженко (Одесса, март 1995 г.); 5) на II конференции "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" (Киев, май 1995 г.); 6) на Международной конференции "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление", посвященной 90-летию со дня рождения Ф. Д. Гахова (Минск, февраль 1996 г.); 7) на семинаре по теории интерполяции линейных операторов в Воронежском государственном университете, руководитель – проф. Е. М. Семенов (Воронеж, сентябрь 1996 г.); 8) на семинаре по теории псевдодифференциальных операторов в Ростовском государственном университете, руководители – проф. И. Б. Симоненко и проф. Н. К. Карапетянц (Ростов-на-Дону, октябрь 1996 г.); 9) на семинаре по теории сингулярных интегральных уравнений в Университете Альгарве, руководитель – проф. В. Г. Кравченко (Фару, Португалия, июль 1997 г.); 10) на Международной конференции "Operator Theory and Applications", посвященной 90-летию со дня рождения М. Г. Крейна (Одесса, август 1997 г.); 11) на семинаре по теории операторов в Южно-Украинском педагогическом университете, руководитель – проф. Д. З. Аров (Одесса, ноябрь 1997 г.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 7 работ, 1 работа принята к печати. Их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, изложена на 142 с. машинописного текста. Библиография содержит 85 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткий обзор известных результатов, дается аннотация содержания. Первая глава посвящена вопросам ограниченности взвешенного оператора сингулярного интегрирования в перестановочно инвариантном пространстве с весом и разработке адекватного аппарата полумультипликативных функций, ассоциированных с пространством, кривой и весом.

В первом параграфе приводятся необходимые сведения из теории перестановочно инвариантных пространств с весом. Во втором параграфе вводится ключевое понятие – полумультипликативная функция и ее индексы. Далее рассматриваются интерполяционные характеристики перестановочно инвариантного пространства X – индексы Бойда α_X, β_X и индексы Зиппина p_X, q_X, являющиеся индексами некоторых полумультипликативных функций. Будем говорить, что индексы Бойда нетривиальны, если $0 < \alpha_X \le \beta_X < 1$.

Пусть Γ – простая спрямляемая кривая, $w : \Gamma \to [0, \infty]$ – вес. Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Коши от функции $\varphi \in L^1(\Gamma)$:

$$(S\varphi)(t) := \lim_{R \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t,R)} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где $\Gamma(t, R) := \{\tau \in \Gamma : |t - \tau| < R\}$. Известно, что для ограниченности оператора S в пространстве Лебега с весом $L^p(\Gamma, w), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы вес w принадлежит классу Макенхаупта $A_p(\Gamma)$, т.е. выполнялось условие

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{R > 0} \left(\frac{1}{R} \int_{\Gamma(t,R)} w^p(\tau) |d\tau| \right)^{1/p} \left(\frac{1}{R} \int_{\Gamma(t,R)} w^{-q}(\tau) |d\tau| \right)^{1/q} < \infty,$$

где $1/p + 1/q = 1$. В третьем параграфе вводится аналог класса Макенхаупта для перестановочно инвариантных пространств $X(\Gamma)$:

$$A_X(\Gamma) := \left\{ w : \Gamma \to [0, \infty] \;\middle|\; \sup_{t \in \Gamma} \sup_{R > 0} \frac{1}{R} \| w \chi_{\Gamma(t,R)} \|_{X(\Gamma)} \| w^{-1} \chi_{\Gamma(t,R)} \|_{X'(\Gamma)} < \infty \right\},$$

где $\chi_{\Gamma(t,R)}$ – характеристическая функция порции $\Gamma(t, R)$, $X'(\Gamma)$ – ассоциированное с $X(\Gamma)$ перестановочно инвариантное пространство. Если вес w принадлежит классу $A_X(\Gamma)$, то Γ является кривой Карлесона (регулярной кривой Альфорса-Давида), т.е.

$$C_\Gamma := \sup_{t \in \Gamma} \sup_{R > 0} \frac{|\Gamma(t, R)|}{R} < \infty,$$

где $|\gamma|$ обозначает меру множества $\gamma \subset \Gamma$.

Теорема 3.3. *Пусть Γ – простая спрямляемая кривая. Если оператор S ограничен в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$, то $w \in A_X(\Gamma)$.*

С применением интерполяционной теоремы Бойда доказывается достаточное условие ограниченности оператора S в перестановочно инвариантном пространстве с весом:

Теорема 3.5. *Пусть $X(\Gamma)$ – перестановочно инвариантное пространство с нетривиальными индексами Бойда α_X, β_X. Пусть вес w принадлежит классам Макенхаупта $A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)$ и $A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$. Тогда оператор S ограничен в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$.*

Из теорем 3.3 и 3.5 вытекает обобщение теоремы Г. Давида об ограниченности оператора S в случае перестановочно инвариантного пространства $X(\Gamma)$ с нетривиальными индексами Бойда: необходимо и достаточно, чтобы Γ была кривой Карлесона.

В 1995 г. А. Беттчер и Ю. И. Карлович связали с весом ψ, имеющим только один разрыв в точке $t \in \Gamma$ полумультипликативную функцию $W_t\psi$ (преобразование W функции ψ в точке t). Индексы этой функции при $\psi(\tau) = \eta_t(\tau) := e^{-\arg(\tau - t)}$ характеризуют степень закрученности кривой в точке t и называются индексами спиралевидности кривой в точке t. В монографии А. Беттчера и Ю. И. Карловича также рассмотрены интегральные аналоги преобразования W: преобразования V^0 и U веса ψ в точке t, позволяющие расширить класс рассматриваемых весов и выразить в терминах индексов полумультипликативных функций $V_t^0(\varphi_{t,\gamma} w)$ и $U_t(\varphi_{t,\gamma} w)$ условия принадлежности веса $\varphi_{t,\gamma}(\tau) w(\tau) := |(\tau - t)^\gamma| w(\tau)$ классу Макенхаупта $A_p(\Gamma)$.

В четвертом параграфе вводится новое преобразование Q, являющееся аналогом преобразования U в случае перестановочно инвариантных пространств. Рассмотрим порцию кривой Γ в кольце:

$$\Delta(t, R) := \Gamma(t, R) \setminus \Gamma(t, R/2).$$

Предположим, что $\psi : \Gamma \to [0, \infty]$ – вес, для которого $\psi \chi_{\Delta(t,R)} \in X(\Gamma)$, $\psi^{-1} \chi_{\Delta(t,R)} \in X'(\Gamma)$ при $R \in (0, d_t]$, где $d_t := \max\limits_{\tau \in \Gamma} |\tau - t|$. Обозначим

$$G_\psi(R_1, R_2) := \frac{\|\psi \chi_{\Delta(t,R_1)}\|_{X(\Gamma)} \|\psi^{-1} \chi_{\Delta(t,R_2)}\|_{X'(\Gamma)}}{|\Delta(t, R_2)|}, \quad R_1, R_2 \in (0, d_t].$$

Введем полумультипликативную функцию

$$(Q_t\psi)(x) := \begin{cases} \sup\limits_{0 < R \le d_t} G_\psi(xR, R), & x \in (0, 1], \\ \sup\limits_{0 < R \le d_t} G_\psi(R, x^{-1}R), & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $Q_t\psi$ – результат преобразования Q веса ψ в точке $t \in \Gamma$. В пункте 4.3 устанавливается связь между индексами полумультипликативных функций $W_t\psi$, $Q_t w$ и $Q_t(\psi w)$. В заключение §4 вводится локальный аналог $A_X(\Gamma, t)$ класса $A_X(\Gamma)$ и показывается, что принадлежность веса ψ классу $A_X(\Gamma,t)$ влечет регулярность (т.е. ограниченность в окрестности единицы) полумультипликативной функции $Q_t\psi$ и принадлежность ее индексов сегменту $[0,1]$.

В пункте 5.1 доказывается, что если $w\in A_X(\Gamma)$, то $\log w$ имеет ограниченную среднюю осцилляцию. Пусть $\psi:\Gamma\to[0,\infty]$ – вес такой, что $\log\psi\in L^1(\Gamma(t,R))$ для любого $R\in(0,d_t]$. Обозначим

$$H_\psi(R_1,R_2):=\exp(\Omega_t(\log\psi,R_1))/\exp(\Omega_t(\log\psi,R_2)),\quad R_1,R_2\in(0,d_t].$$

Рассмотрим полумультипликативную функцию

$$(V_t^0\psi)(x):=\limsup_{R\to 0}H_\psi(xR,R),\quad x\in(0,\infty).$$

Говорят, что функция $V_t^0\psi$ – результат преобразования V^0 веса ψ в точке $t\in\Gamma$. В пятом параграфе приводятся необходимые сведения о преобразовании V^0, а также изучается связь между индексами полумультипликативных функций $V_t^0\psi$ и $Q_t\psi$.

В шестом параграфе вводятся индикаторные функции $\alpha_t(x)$ и $\alpha_t^*(x)$ ($\beta_t(x)$ и $\beta_t^*(x)$) как нижний (верхний) индекс полумультипликативных функций $V_t^0(\eta_t^x w)$ и $Q_t(\eta_t^x w)$, соответственно. С помощью результатов параграфов 4–5 устанавливаются соотношения между этими функциями. Доказывается, что функция α_t^* вогнута, а функция β_t^* выпукла, функции α_t^* и β_t^* имеют асимптоты при $x\to\pm\infty$, и выпуклые области $\{x+iy\in\mathbb{C}:y<\alpha_t^*(x)\}$ и $\{x+iy\in\mathbb{C}:y>\beta_t^*(x)\}$ могут быть разделены прямыми, параллельными к этим асимптотам. В терминах индикаторных функций найдены условия ограниченности оператора $\varphi_{t,\gamma}S\varphi_{t,\gamma}^{-1}I$, где $\varphi_{t,\gamma}(\tau)=|(\tau-t)^\gamma|,\gamma\in\mathbb{C}$, в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma,w)$:

Теорема 6.8. *Пусть $X(\Gamma)$ – перестановочно инвариантное пространство. Пусть вес w принадлежит классу $A_X(\Gamma)$. Если оператор $\varphi_{t,\gamma}S\varphi_{t,\gamma}^{-1}I$ ограничен в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma,w)$, то*

$$0\le\operatorname{Re}\gamma+\alpha_t^*(\operatorname{Im}\gamma)\le\operatorname{Re}\gamma+\beta_t^*(\operatorname{Im}\gamma)\le 1.$$

Теорема 6.12. *Пусть $X(\Gamma)$ – перестановочно инвариантное пространство с нетривиальными индексами Бойда α_X,β_X. Пусть вес w принад-*

лежит классам Макенхаупта $A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)$ *и* $A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$. *Если*

$$0 < \alpha_X + \operatorname{Re}\gamma + \alpha_t(\operatorname{Im}\gamma) \le \beta_X + \operatorname{Re}\gamma + \beta_t(\operatorname{Im}\gamma) < 1,$$

то оператор $\varphi_{t,\gamma} S \varphi_{t,\gamma}^{-1} I$ *ограничен в пространстве* $X(\Gamma, w)$.

В заключение §6 сформулировано условие распадения индикаторных функций:

$$\alpha_t^*(\operatorname{Im}\gamma) = \alpha_X + \alpha_t(\operatorname{Im}\gamma), \quad \beta_t^*(\operatorname{Im}\gamma) = \beta_X + \beta_t(\operatorname{Im}\gamma)$$

для всех $\gamma \in \mathbb{C}$ при которых $\varphi_{t,\gamma} w \in A_X(\Gamma, t)$. Указаны случаи выполнения условия распадения индикаторных функций. Условие распадения выполняется, например, в случае пространства Лебега с общим весом Макенхаупта на произвольной кривой Карлесона. Интересным частным случаем пространств с распадающимися индикаторными функциями являются перестановочно инвариантные пространства с весом $X(\Gamma, w)$, для которых $\alpha_X = p_X < q_X = \beta_X$ и $\alpha_t(x) = \beta_t(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Последнее равенство выполняется в случае степенноподобного веса и логарифмической кривой Карлесона. При выполнении условия распадения индикаторных функций необходимое условие ограниченности оператора $\varphi_{t,\gamma} S \varphi_{t,\gamma}^{-1} I$ в пространстве $X(\Gamma, w)$ почти совпадает с достаточным.

Вторая глава посвящена построению теории Нетера для сингулярных интегральных операторов с измеримыми и, в частности, кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$.

В седьмом параграфе устанавливается ряд вспомогательных утверждений, связанных с оператором S в сепарабельных и рефлексивных перестановочно инвариантных пространствах с весом $X(\Gamma, w)$. В частности, доказана компактность коммутатора $aS - SaI$, где a – непрерывная функция. В случае жордановой (т.е. гомеоморфной окружности) кривой оператор S является инволюцией: $S^2 = I$. Отсюда следует, что операторы $P_\pm := (I \pm S)/2$ являются проекторами, что позволяет рассмотреть замкнутые подпространства

$$X_+(\Gamma, w) := P_+ X(\Gamma, w), \overset{\circ}{X}_-(\Gamma, w) := P_- X(\Gamma, w), X_-(\Gamma, w) := \overset{\circ}{X}_-(\Gamma, w) \dot{+} \mathbb{C}.$$

В восьмом параграфе в предположении ограниченности оператора

S на случай рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с весом обобщаются основные результаты о нетеровости сингулярного интегрального оператора (СИО)

$$R_a := aP_+ + P_-,$$

где a – ограниченная измеримая функция, хорошо известные для пространств Лебега с весом. Доказано, что для полунетеровости оператора R_a необходимо, чтобы $a^{-1} \in L^\infty(\Gamma)$, если это выполняется, то одно из дефектных чисел равно нулю. В этом параграфе доказаны также критерий нетеровости оператора R_a с непрерывным коэффициентом a и принцип разделения особенностей. Основными инструментами при изучении СИО с кусочно непрерывными коэффициентами являются локальный принцип и теорема о факторизации ограниченной измеримой функции.

И. Б. Симоненко (1965) построил общую теорию операторов локального типа и получил приложения этой теории к изучению СИО. В пункте 8.6 дана реализация локального принципа для рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с весом с использованием локального принципа, разработанного И. Ц. Гохбергом и Н. Я. Крупником.

В середине 60-х годов И. Б. Симоненко доказал, что нетеровость СИО с ограниченным измеримым коэффициентом в пространстве Лебега эквивалентна факторизуемости коэффициента. В пункте 8.7 рассматривается обобщение этого результата на случай рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с весом. Будем говорить, что функция $a \in L^\infty(\Gamma)$ допускает факторизацию в пространстве $X(\Gamma, w)$, если функция $a^{-1} \in L^\infty(\Gamma)$, а функция a представима в виде

$$a(t) = a_-(t)t^\kappa a_+(t) \quad \text{почти всюду на } \Gamma, \tag{2}$$

где $\kappa \in \mathbb{Z}$,

(i) $a_- \in X_-(\Gamma, w), a_-^{-1} \in X'_-(\Gamma, w^{-1}), a_+ \in X'_+(\Gamma, w^{-1}), a_+^{-1} \in X_+(\Gamma, w)$;

(ii) оператор $a_+^{-1}Sa_+I$ ограничен в пространстве $X(\Gamma, w)$.

Здесь $X'_-(\Gamma, w^{-1})$ и $X'_+(\Gamma, w^{-1})$ – подпространства ассоциированного пространства $X'(\Gamma, w^{-1})$, которое в силу рефлексивности пространства

$X(\Gamma, w)$ изометрически изоморфно сопряженному пространству $(X(\Gamma, w))^*$.

Теорема 8.13. *Функция $a \in L^\infty(\Gamma)$ допускает факторизацию (2) в пространстве $X(\Gamma, w)$ тогда и только тогда, когда оператор R_a нетеров в $X(\Gamma, w)$. В этом случае индекс оператора R_a равен $-\varkappa$.*

Пусть Γ – жорданова кривая Карлесона, $X(\Gamma)$ – перестановочно инвариантное пространство с нетривиальными индексами Бойда α_X, β_X, вес w принадлежит классам Макенхаупта $A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)$ и $A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$. В этом случае в силу теоремы 3.5 оператор S ограничен в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$. Обозначим через $PC(\Gamma)$ банахову алгебру кусочно непрерывных функций: функция $a \in L^\infty(\Gamma)$ принадлежит $PC(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $t \in \Gamma$ существуют конечные односторонние пределы $a(t \pm 0) := \lim\limits_{\tau \to t \pm 0} a(\tau)$. В девятом параграфе для кусочно непрерывной функции a, обратимой в $L^\infty(\Gamma)$, подбирается локально эквивалентная ей в точке $t \in \Gamma$ степенная функция $g_{t,\gamma}(\tau) = \tau^\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, с одним разрывом в точке t. Затем в терминах индикаторных функций α_t^*, β_t^* и α_t, β_t доказываются, соответственно, необходимое и достаточное условия факторизуемости функции $g_{t,\gamma}$ в пространстве $X(\Gamma, w)$:

Теорема 9.1. *Если функция $g_{t,\gamma}$ допускает факторизацию в пространстве $X(\Gamma, w)$, то*

$$-\operatorname{Re}\gamma + \theta\alpha_t^*(-\operatorname{Im}\gamma) + (1-\theta)\beta_t^*(-\operatorname{Im}\gamma) \notin \mathbb{Z}$$

для всех $\theta \in [0,1]$. Более того, существует $l \in \mathbb{Z}$ такое, что вес $\varphi_{t,l-\gamma} w \in A_X(\Gamma)$.

Теорема 9.2. *Если*

$$\varkappa_t(\theta) := -\operatorname{Re}\gamma + \theta\Big(\alpha_X + \alpha_t(-\operatorname{Im}\gamma)\Big) + (1-\theta)\Big(\beta_X + \beta_t(-\operatorname{Im}\gamma)\Big) \notin \mathbb{Z}$$

для всех $\theta \in [0,1]$, то целая часть $[\varkappa_t(\theta)] =: -k$ не зависит от θ, и представление

$$g_{t,\gamma}(\tau) = (1 - t/\tau)^{k-\gamma}\tau^k(\tau - t)^{\gamma-k}, \quad \tau \in \Gamma \setminus \{t\},$$

является факторизацией функции $g_{t,\gamma}$ в пространстве $X(\Gamma, w)$.

При доказательстве теорем 9.1 и 9.2 существенно используются теоремы 6.8 и 6.12, соответственно.

В десятом параграфе с помощью локального принципа и теоремы 8.13 исследование нетеровости оператора R_a, где $a \in PC(\Gamma)$, сводится к вопросу о факторизуемости функции $g_{t,\gamma}$. В случае выполнения условия распадения индикаторных функций необходимые и достаточные условия факторизуемости функции $g_{t,\gamma}$ (теоремы 9.1 и 9.2) совпадают. Из перечисленных выше теорем вытекает один из основных результатов диссертации – вид существенного спектра оператора R_a, т.е. множества всех чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $R_a - \lambda I$ не является нетеровым в пространстве $X(\Gamma, w)$.

Пусть $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, причем $\alpha(x) \leq \beta(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество

$$Y(\alpha,\beta) := \Big\{\gamma = x + iy \in \mathbb{C} \, : \, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\Big\}.$$

Для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ положим

$$\mathcal{L}(z_1, z_2; \alpha, \beta) := \{z_1, z_2\} \cup \big\{\xi = M_{z_1,z_2}(e^{2\pi\gamma}) : \gamma \in Y(\alpha,\beta)\big\},$$

где $M_{z_1,z_2}(\xi) := (z_2\xi - z_1)/(\xi - 1)$ – преобразование Мебиуса. Множество $\mathcal{L}(z_1, z_2; \alpha, \beta)$ называется листом между z_1 и z_2. Предположим, что индикаторные функции удовлетворяют условию распадения в каждой точке $t \in \Gamma$. Рассмотрим листы, порождаемые индикаторными функциями $\alpha_X + \alpha_t$ и $\beta_X + \beta_t$. Несложно видеть, что лист $\mathcal{L}(z_1, z_2; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t)$ является односвязным множеством, содержащим точки z_1 и z_2. Для $a \in PC(\Gamma)$ обозначим через $\mathfrak{R}(a)$ существенный образ функции a, т.е.

$$\mathfrak{R}(a) := \bigcup_{t\in\Gamma} \{a(t-0), a(t+0)\} = \bigcup_{t\in\Gamma\setminus J_a} \{a(t)\} \cup \bigcup_{t\in J_a} \{a(t-0), a(t+0)\},$$

где J_a – множество скачков функции a, которое, как известно, не более чем счетно.

Теорема 10.2. *Существенный спектр оператора R_a, где $a \in PC(\Gamma)$, вычисляется по формуле*

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}\, R_a = \mathfrak{R}(a) \cup \bigcup_{t\in J_a} \mathcal{L}(a(t-0), a(t+0); \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \cup \{1\}. \quad (3)$$

В заключение §10 вычислен индекс оператора R_a, где $a \in PC(\Gamma)$.

Рассмотрим множество

$$a^{\#} := \mathfrak{R}(a) \cup \bigcup_{t \in J_a} \mathcal{L}_t(a(t-0), a(t+0)),$$

где дуга $\mathcal{L}_t(z_1, z_2)$ определяется формулой

$$\mathcal{L}_t(z_1, z_2) := \mathcal{L}(z_1, z_2; \sigma_t, \sigma_t), \tag{4}$$

и $\sigma_t(x) := (\alpha_X + \alpha_t(x))/2 + (\beta_X + \beta_t(x))/2$ при $x \in \mathbb{R}$, Легко видеть, что $a^{\#}$ является непрерывной замкнутой кривой. Введем на $a^{\#}$ ориентацию: на участках непрерывности a положительное направление задается изменением t в положительном направлении вдоль кривой Γ, а между предельными значениями функции a в точке разрыва $t \in J_a$ положительным считается направление движения вдоль дуги $\mathcal{L}_t(a(t-0), a(t+0))$ от точки $a(t-0)$ к точке $a(t+0)$.

Пусть γ – замкнутая непрерывная ориентированная кривая, не проходящая через начало координат. Число оборотов этой кривой вокруг нуля против часовой стрелки будем обозначать через $\operatorname{wind}\gamma$.

Теорема 10.5. *Если оператор R_a, где $a \in PC(\Gamma)$, нетеров, то $0 \notin a^{\#}$,*

$$\operatorname{Ind} R_a = -\operatorname{wind} a^{\#}.$$

На основе теорем 10.2 и 10.5 доказывается

Теорема 10.6. *Спектр оператора R_a равен*

$$\operatorname{sp} R_a = \operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} R_a \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} R_a \ : \ \operatorname{wind}_\lambda a^{\#} \neq 0\right\},$$

где $\operatorname{wind}_\lambda a^{\#}$ означает число оборотов кривой $a^{\#}$ вокруг λ против часовой стрелки, а $\operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} R_a$ задается формулой (3).

В третьей главе изучается банахова алгебра СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами. Пусть Γ – жорданова кривая Карлесона. Пусть $X(\Gamma)$ – перестановочно инвариантное пространство с нетривиальными индексами Бойда α_X, β_X. Предположим, что вес $w : \Gamma \to [0, \infty]$ принадлежит классам Макенхаупта $A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)$ и $A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$. Предположим, что перестановочно инвариантное пространство с весом $X(\Gamma, w)$ рефлексивно. Будем обозначать через $X^n(\Gamma, w)$ прямую сумму n копий пространства $X(\Gamma, w)$. Предположим, что индикаторные функции α_t, β_t и α_t^*, β_t^* удовлетворяют условию распадения в каждой точке

$t \in \Gamma$. Пусть $\mathfrak{B}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов в пространстве $X^n(\Gamma, w)$, $\mathcal{K}$ – идеал компактных операторов в $\mathfrak{B}$. Пусть I – тождественный оператор, а оператор S определен в пространстве $X^n(\Gamma, w)$ покомпонентно формулой (1). При сделанных предположениях $S \in \mathfrak{B}$ в силу теоремы 3.5. В пространстве $X^n(\Gamma, w)$ рассмотрим проекторы $P_\pm := (I \pm S)/2$. Через $PC_n(\Gamma)$ будем обозначать множество $n \times n$ матриц-функций с элементами из $PC(\Gamma)$. Рассмотрим наименьшую банахову подалгебру $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{B}$, содержащую операторы умножения на матрицы-функции из $PC_n(\Gamma)$ и оператор S.

В одиннадцатом параграфе с помощью локального принципа Аллана-Дугласа и теоремы о двух проекторах Финка-Роха-Зильберманна (1993) и Гохберга-Крупника (1993) построено символьное исчисление для алгебры $\mathfrak{A}$ и установлен критерий нетеровости оператора $A \in \mathfrak{A}$ в терминах невырожденности их символов.

Рассмотрим "пучок листов"

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{X(\Gamma,w)} := \bigcup_{t\in\Gamma} \Big(\{t\} \times \mathcal{L}(0,1;\alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t)\Big).$$

Теорема 11.5. *(а) Для каждой точки $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$ отображение*

$$\sigma_{t,\mu} \;:\; \{S\} \cup \{aI \;:\; a \in PC_n(\Gamma)\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

определяемое равенствами

$$\sigma_{t,\mu}(S) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{t,\mu}(aI) =$$

$$= \begin{pmatrix} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0) - a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0) - a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu) + a(t-0)\mu \end{pmatrix},$$

продолжается до (непрерывного) гомоморфизма $\sigma_{t,\mu} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ банаховых алгебр, ядро которого содержит идеал $\mathcal{K}$;

(б) оператор $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в пространстве $X^n(\Gamma, w)$ тогда и только тогда, когда $\det \sigma_{t,\mu}(A) \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$;

(в) фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратимо замкнута (наполнена) в алгебре Калкина $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$, т.е. если класс смежности $A + \mathcal{K} \in \mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратим в алгебре $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$, то $(A+\mathcal{K})^{-1} \in \mathfrak{A}/\mathcal{K}$.

В двенадцатом параграфе вычисляется индекс произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{A}$ в терминах его символа. Матрицу-функцию $\mathcal{A}(t,\mu) = \sigma_{t,\mu}(A)$ при $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$ будем называть символом оператора $A \in \mathfrak{A}$. Представим его в виде

$$\mathcal{A}(t,\mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(t,\mu) & \mathcal{A}_{12}(t,\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(t,\mu) & \mathcal{A}_{22}(t,\mu) \end{pmatrix}, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M},$$

где $\mathcal{A}_{ij}(t,\mu)$ – $n \times n$ матрицы-функции. Семейство гомоморфизмов $\sigma_{t,\mu}$, вообще говоря, не является равномерно ограниченным по $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$. С этим связана основная сложность при вычислении индекса оператора, состоящая в обосновании непрерывности кривой, строящейся по символу. Число оборотов этой кривой вокруг нуля против часовой стрелки и дает индекс оператора со знаком "–".

Однако удается обосновать равномерную ограниченность функций $\det \mathcal{A}, \det \mathcal{A}_i, i = 1,2$ на множестве $\mathfrak{M}$, а также тот факт, что из равномерной сходимости операторов $A_s \to A$ вытекает равномерная сходимость детерминантов символов $\det \mathcal{A}^{(s)} \to \det \mathcal{A}$ ($\det \mathcal{A}_{ii}^{(s)} \to \det \mathcal{A}_{ii}, i = 1,2$). С применением этих результатов доказывается

Теорема 12.7. *Если оператор $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в пространстве $X^n(\Gamma, w)$, то функция*

$$A(t,\mu) := \frac{\det \mathcal{A}(t,\mu)}{\det \mathcal{A}_{22}(t,0) \det \mathcal{A}_{22}(t,1)}, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}$$

обладает следующими свойствами:

(i) $A(t,\mu) \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$;

(ii) $A(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$;

(iii) множество

$$A_{\#} := \mathfrak{R}(A(\cdot,0)) \cup \bigcup_{t \in J_{A(\cdot,0)}} \{z = A(t,\mu) \,:\, \mu \in \mathcal{L}_t(0,1)\},$$

где $J_{A(\cdot,0)}$ – множество скачков функции $A(\cdot,0)$, дуга $\mathcal{L}_t(0,1)$ определяется формулой (4), является замкнутой непрерывной естественно ориентированной кривой, не проходящей через начало координат,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{wind} A_{\#}.$$

В теореме 12.7 ориентация на кривой $A_{\#}$ задается по аналогии с заданием ориентации на кривой $a^{\#}$. Так как $A(\cdot, 0) \in PC(\Gamma)$, то на участках непрерывности $A(t, 0)$ положительным считается направление, соответствующее изменению t вдоль кривой Γ в положительном направлении. На дополнительных дугах $\{z = A(t, \mu) \ : \ \mu \in \mathcal{L}_t(0, 1)\}$, соединяющих предельные значения $A(t-0, 0)$ и $A(t+0, 0)$, положительным считается направление, соответствующее изменению μ вдоль дуги $\mathcal{L}_t(0, 1)$ от точки 0 к точке 1.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю Тарасенко Анне Андреевне за руководство работой. Работа выполнена при частичной поддержке Международного фонда “Відродження”, программа ISSEP “Соросівські аспіранти”, грант №PSU 071102.