ГЛАВА III.
АЛГЕБРА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КУСОЧНО НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

11. Символьное исчисление для алгебры СИО

11.1. Идеал компактных операторов

Пусть Γ – жорданова кривая Карлесона. Пусть $X(\Gamma)$ – перестановочно инвариантное пространство с нетривиальными индексами Бойда α_X, β_X. Предположим, что вес $w : \Gamma \to [0, \infty]$ принадлежит классам Макенхаупта $A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)$ и $A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$. В пункте 5.2 приведены примеры весов, удовлетворяющих этим условиям. Предположим, что перестановочно инвариантное пространство с весом $X(\Gamma, w)$ рефлексивно. Будем обозначать через $X^n(\Gamma, w)$ прямую сумму n копий пространства $X(\Gamma, w)$. Ясно, что пространство $X^n(\Gamma, w)$ также рефлексивно. Предположим, что индикаторные функции α_t, β_t и α_t^*, β_t^* удовлетворяют условию распадения в каждой точке $t \in \Gamma$. Пусть $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(X^n(\Gamma, w))$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов в пространстве $X^n(\Gamma, w)$, $\mathcal{K} := \mathcal{K}(X^n(\Gamma, w))$ – идеал компактных операторов в $\mathfrak{B}$. Пусть I – тождественный оператор, а оператор S определен в пространстве $X^n(\Gamma, w)$ покомпонентно формулой (0.1). При сделанных предположениях $S \in \mathfrak{B}$ в силу теоремы 3.5. В пространстве $X^n(\Gamma, w)$ рассмотрим проекторы $P_\pm := (I \pm S)/2$.

Пусть $F(\Gamma)$ – некоторый класс функций, заданных на кривой Γ. Через $F_n(\Gamma)$ будем обозначать множество $n \times n$ матриц-функций с элементами из $F(\Gamma)$. Рассмотрим наименьшую банахову подалгебру $\mathfrak{A} := \mathrm{alg}(PC_n, S)$ алгебры $\mathfrak{B}$, содержащую операторы умножения на матрицы-функции из $PC_n(\Gamma)$ и оператор S.

Лемма 11.1. *Множество $\mathcal{K}(X^n(\Gamma, w))$ всех компактных операторов в пространстве $X^n(\Gamma, w)$ содержится в* $\operatorname{alg}(C_n, S)$ *– наименьшей банаховой подалгебре алгебры $\mathfrak{B}(X^n(\Gamma, w))$, содержащей операторы умножения на непрерывные матрицы-функции и оператор S.*

Доказательство. Оператор

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} : X^n(\Gamma, w) \to X^n(\Gamma, w)$$

принадлежит $\mathcal{K}(X^n(\Gamma, w))$ ($\operatorname{alg}(C_n, S)$) тогда и только тогда, когда каждый из его элементов принадлежит $\mathcal{K}(X(\Gamma, w))$ (соответственно, $\operatorname{alg}(C, S)$). Потому достаточно доказать утверждение в случае $n = 1$.

Без ограничения общности предположим, что $0 \notin \Gamma$. Тогда из леммы 7.5(в) следует, что $\{t^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ является базисом в пространстве $X(\Gamma, w)$. Потому пространство $X(\Gamma, w)$ обладает свойством аппроксимации, т.е. каждый компактный оператор в $X(\Gamma, w)$ может быть приближен по операторной норме конечномерными операторами. Из общего вида линейного функционала в пространстве $X(\Gamma, w)$ (см. лемму 7.5(а)) вытекает, что конечномерный оператор в $X(\Gamma, w)$ задается формулой

$$(Kf)(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) \int_\Gamma b_j(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in \Gamma, \tag{11.1}$$

где $a_j \in X(\Gamma, w), b_j \in X'(\Gamma, w^{-1})$. Так как $C(\Gamma)$ плотно в $X(\Gamma, w)$ и в $X'(\Gamma, w^{-1})$ по лемме 7.5(б), то каждый оператор вида (11.1) может быть приближен по операторной норме операторами такого же вида, но с непрерывными a_j и b_j. Очевидно, что оператор (11.1) равен

$$K = \sum_{j=1}^{m} a_j (S\chi I - \chi S) b_j I,$$

где $\chi(\tau) = \tau$ при $\tau \in \Gamma$. Следовательно, K принадлежит $\mathrm{alg}(C, S)$ при $a_j, b_j \in C(\Gamma)$. ■

Из леммы 11.1 следует, что $\mathcal{K}$ – замкнутый двухсторонний идеал в алгебре $\mathfrak{A}$. Потому мы можем рассмотреть фактор-алгебру $\mathfrak{A}^\pi := \mathfrak{A}/\mathcal{K}$, элементами которой являются классы смежности $A^\pi := A + \mathcal{K}$, где $A \in \mathfrak{A}$.

Для изучения обратимости в $\mathfrak{A}^\pi$ мы будем использовать локальный принцип Аллана-Дугласа и теорему о двух проекторах Финка-Роха-Зильберманна, Гохберга-Крупника.

11.2. Локальный принцип Аллана-Дугласа

Пусть B – банахова алгебра с единицей e. Через GB будем обозначать группу обратимых элементов из B. Обозначим через $\mathrm{sp}_B\, x$ спектр элемента x в алгебре B, т.е. множество всех чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $x - \lambda e \notin GB$. Подалгебра Z алгебры B называется центральной подалгеброй, если для всех $z \in Z$ и $b \in B$ выполняется равенство $zb = bz$. Очевидно, что центральная подалгебра коммутативна.

Сформулируем локальный принцип Аллана-Дугласа (см. [43], [59], а также [49, гл. 8], [51, гл. 1]).

Теорема 11.2. *Пусть B – банахова алгебра с единицей e, Z – замкнутая центральная подалгебра алгебры B, содержащая e. Пусть Ω – компакт максимальных идеалов алгебры Z. Пусть J_ω – наименьший замкнутый двухсторонний идеал алгебры B, содержащей идеал $\omega \in \Omega$. Тогда элемент b обратим в B тогда и только тогда, когда $b + J_\omega$ обратим в B/J_ω для всех $\omega \in \Omega$.*

Мы будем использовать центральную подалгебру

$$Z := \{(\hat{c}I)^\pi : c \in C(\Gamma)\},$$

где $\hat{c}I$ обозначает оператор умножения на диагональную матрицу-функцию $\mathrm{diag}\{c, \dots, c\}$. Будем говорить, что оператор $A \in \mathfrak{B}$ является оператором локального типа, если $A\hat{c}I - \hat{c}A \in \mathcal{K}$ для всех $c \in C(\Gamma)$. Легко видеть, что множество $\mathfrak{D}$ всех операторов локального типа является банаховой подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$, и оператор $A \in \mathfrak{D}$ нетеров тогда и только тогда, когда класс смежности $A^\pi = A + \mathcal{K}$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{D}^\pi := \mathfrak{D}/\mathcal{K}$. По определению $\mathfrak{D}$, алгебра Z является центральной подалгеброй алгебры $\mathfrak{D}^\pi$. Таким образом, мы можем применить теорему 11.2 к алгебрам $\mathfrak{D}^\pi$ и Z. Компакт максимальных идеалов Ω алгебры Z может быть отождествлен с кривой Γ с помощью преобразования Гельфанда $\mathcal{G} : Z \to C(\Gamma)$, действующего по правилу $(\mathcal{G}(\hat{c}I)^\pi)(t) = c(t)$. В соответствии с теоремой 11.2 для каждого $t \in \Gamma$ рассмотрим наименьший замкнутый двухсторонний идеал $J_t \subset \mathfrak{D}^\pi$, содержащий идеал

$$\{(\hat{c}I)^\pi : c \in C(\Gamma), c(t) = 0\}.$$

Пусть $\chi_t \in PC(\Gamma)$ – характеристическая функция произвольной дуги из Γ, удовлетворяющая условиям $\chi_t(t-0) = 0$ и $\chi_t(t+0) = 1$. Для $a \in PC_n(\Gamma)$ определим матрицу-функцию $a_t \in PC_n(\Gamma)$ формулой

$$a_t = a(t-0)(1-\chi_t) + a(t+0)\chi_t. \tag{11.2}$$

Ясно, что $(aI)^\pi - (a_tI)^\pi \in J_t$. Следовательно, если $A \in \mathfrak{A}$, то $A^\pi + J_t$ принадлежит наименьшей банаховой подалгебре (с единицей) W_t алгебры $\mathfrak{D}^\pi/J_t$, содержащей классы смежности $(cI)^\pi + J_t$, где $c \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$p := P_+^\pi + J_t = ((I+S)/2)^\pi + J_t, \quad q := (\hat{\chi}_tI)^\pi + J_t. \tag{11.3}$$

11.3. Теорема о двух проекторах

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{C} := \{(cI)^\pi + J_t : c \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$ алгебры W_t. Так как $\mathcal{C}$ изоморфна $\mathbb{C}^{n\times n}$, то мы можем (и будем) отождествлять $\mathcal{C}$ с

$\mathbb{C}^{n\times n}$. Так как, очевидно, $p^2 = p$ и $q^2 = q$, то алгебра W_t порождена двумя проекторами p, q и подалгеброй $\mathcal{C} = \mathbb{C}^{n\times n}$, элементы которой коммутируют с p и q. Мы можем применить следующую теорему Финка, Роха, Зильберманна [63] и Гохберга, Крупника [65] (см. также [49, гл. 8], [45]).

Теорема 11.3. *Пусть F – банахова алгебра с единицей e, пусть $\mathcal{C} = \mathbb{C}^{n\times n}$ – банахова подалгебра алгебры F, содержащая e, пусть p и q – проекторы в F такие, что $cp = pc$ и $cq = qc$ для всех $c \in \mathcal{C}$. Пусть $W = \operatorname{alg}(\mathcal{C}, p, q)$ – наименьшая банахова подалгебра алгебры F, содержащая $\mathcal{C}, p, q$. Пусть*

$$x = pqp + (e-p)(e-q)(e-p).$$

Предположим, что 0 и 1 не являются изолированными точками $\operatorname{sp}_F x$. Тогда

(а) для каждого $\mu \in \operatorname{sp}_F x$ отображение $\sigma_\mu : \mathcal{C} \cup \{p, q\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, определенное формулами

$$\sigma_\mu c = \begin{pmatrix} c & O \\ O & c \end{pmatrix}, \quad \sigma_\mu p = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{11.4}$$

$$\sigma_\mu q = \begin{pmatrix} \mu E & \sqrt{\mu(1-\mu)}E \\ \sqrt{\mu(1-\mu)}E & (1-\mu)E \end{pmatrix}, \tag{11.5}$$

где $c \in \mathcal{C}, O$ и E обозначают нулевую и единичную $n \times n$ матрицы и $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ обозначает комплексное число, квадрат которого равен $\mu(1-\mu)$, продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр

$$\sigma_\mu : W \to \mathbb{C}^{2n\times 2n};$$

(б) элемент $a \in W$ обратим в F тогда и только тогда, когда $\det \sigma_\mu a \neq 0$ для всех $\mu \in \operatorname{sp}_F x$;

(в) элемент $a \in W$ обратим в W тогда и только тогда, когда $\det \sigma_\mu a \neq 0$ для всех $\mu \in \operatorname{sp}_W x$.

11.4. Локальный спектр

Применим теорему 11.3 к алгебре $F_t := \mathfrak{D}^\pi / J_t$ и алгебре W_t, порожденной двумя проекторами (11.3) и подалгеброй $\mathcal{C} = \mathbb{C}^{n\times n}$.

Лемма 11.4. *Пусть*

$$x = pqp + (e-p)(e-q)(e-p) = (P_+\hat{\chi}_t P_+ + P_-(1-\chi_t)\hat{} P_-)^\pi + J_t. \quad (11.6)$$

Тогда $\operatorname{sp}_{F_t} x = \operatorname{sp}_{W_t} x = \mathcal{L}(0,1;\alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t)$.

Доказательство. Так как

$$x - \lambda e = p(q-\lambda e)p + (e-p)(e-q-\lambda e)(e-p),$$

$$\begin{aligned} pap + (e-p)b(e-p) &= (pap + e - p)((e-p)b(e-p) + p) \\ &= ((e-p)b(e-p) + p)(pap + e - p), \end{aligned}$$

то $\operatorname{sp}_{F_t} x = S_1 \cup S_2$, где

$$\begin{aligned} S_1 &:= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, p(q-\lambda e)p + e - p \notin GF_t\Big\}, \\ S_2 &:= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, (e-p)(e-q-\lambda e)(e-p) + p \notin GF_t\Big\}. \end{aligned}$$

Пусть φ_t – произвольная непрерывная на $\Gamma \setminus \{t\}$ функция, для которой $\varphi_t(t-0) = 0$ и $\varphi_t(t+0) = 1$. Ясно, что

$$(\hat{\varphi}_t I)^\pi + J_t = (\hat{\chi}_t I)^\pi + J_t, (\hat{\varphi}_t I)^\pi + J_\tau = \varphi_t(\tau) I^\pi + J_\tau, \tau \in \Gamma \setminus \{t\}. \quad (11.7)$$

Обозначим через $\Phi(E)$ множество нетеровых операторов в банаховом пространстве E. Из теоремы 11.2 с учетом (11.7) получим

$$\begin{aligned} S_3 &:= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, P_+(\varphi_t - \lambda)\hat{} P_+ + P_- \notin \Phi(X^n(\Gamma, w))\Big\} \\ &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, (P_+(\varphi_t - \lambda)\hat{} P_+ + P_-)^\pi \notin G\mathfrak{D}^\pi\Big\} \\ &= \bigcup_{\tau\in\Gamma} \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (P_+(\varphi_t - \lambda)\hat{} P_+ + P_-)^\pi + J_\tau \notin G(\mathfrak{D}^\pi / J_\tau)\Big\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (P_+(\chi_t - \lambda)P_+ + P_-)^\pi + J_t \notin GF_t\Big\} \\
&\cup \bigcup_{\tau \in \Gamma \setminus \{t\}} \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (\varphi_t(\tau) - \lambda)P_+^\pi + P_-^\pi + J_\tau \notin G(\mathfrak{D}^\pi / J_\tau)\Big\}. \quad (11.8)
\end{aligned}
$$

Очевидно, что

$$
S_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (P_+(\chi_t - \lambda)P_+ + P_-)^\pi + J_t \notin GF_t\Big\}. \qquad (11.9)
$$

Если $\varphi(\tau) - \lambda \neq 0$, то оператор $(\varphi_t(\tau) - \lambda)^{-1}P_+ + P_-$ является обратным к оператору $(\varphi_t(\tau) - \lambda)P_+ + P_-$. Следовательно, класс смежности $(\varphi_t(\tau) - \lambda)P_+^\pi + P_-^\pi + J_\tau$ обратим в алгебре $\mathfrak{D}^\pi / J_\tau$. Если $\varphi_t(\tau) - \lambda = 0$, то $(\varphi_t(\tau) - \lambda)P_+^\pi + P_-^\pi + J_\tau = P_-^\pi + J_\tau$. По теореме 11.3(а), (б)

$$
\mathrm{sp}_{\mathfrak{D}^\pi / J_\tau}(P_-^\pi + J_\tau) = \mathrm{sp}_{\mathfrak{D}^\pi / J_\tau}(e - p) = \mathrm{sp}_{\mathbb{C}^{2n \times 2n}} \begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix} = \{0, 1\}.
$$

Отсюда следует, что класс смежности $P_-^\pi + J_\tau$ необратим в алгебре $\mathfrak{D}^\pi / J_\tau$. Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{\tau \in \Gamma \setminus \{t\}} \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (\varphi_t(\tau) - \lambda)P_+^\pi + P_-^\pi + J_\tau \notin G(\mathfrak{D}^\pi / J_\tau)\Big\} \\
&= \bigcup_{\tau \in \Gamma \setminus \{t\}} \{\varphi_t(\tau)\} = \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}). \qquad (11.10)
\end{aligned}
$$

Из (11.8) – (11.10) вытекает равенство

$$
S_3 = S_1 \cup \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}). \qquad (11.11)
$$

С другой стороны, по лемме 8.1

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, P_+(\varphi_t - \lambda)P_+ + P_- \notin \Phi(X(\Gamma, w))\Big\} \\
&= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, (\varphi_t - \lambda)P_+ + P_- \notin \Phi(X(\Gamma, w))\Big\} \\
&= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, 0 \in \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}} R_{\varphi_t - \lambda}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Так как $(\varphi_t - \lambda)(t - 0) = -\lambda, (\varphi_t - \lambda)(t + 0) = 1 - \lambda$, то по теореме 10.2

$$
S_3 = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, 0 \in \mathfrak{R}(\varphi_t - \lambda) \cup \mathcal{L}(-\lambda, 1 - \lambda; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \cup \{1\}\Big\}.
$$

Ясно, что $0 \in \mathfrak{R}(\varphi_t - \lambda) \cup \{1\}$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}) \cup \{0,1\}$. С другой стороны, если $\lambda \notin \{0,1\}$, то

$$
\begin{aligned}
& 0 \in \mathcal{L}(-\lambda, 1-\lambda; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \\
& \Longleftrightarrow M_{-\lambda,1-\lambda}(e^{2\pi\gamma}) = 0 \quad \text{для некоторого} \quad \gamma \in Y(\alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \\
& \Longleftrightarrow e^{2\pi\gamma} = \lambda/(\lambda - 1) \quad \text{для некоторого} \quad \gamma \in Y(\alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \\
& \Longleftrightarrow M_{0,1}(e^{2\pi\gamma}) = \lambda \quad \text{для некоторого} \quad \gamma \in Y(\alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \\
& \Longleftrightarrow \lambda \in \mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t),
\end{aligned}
$$

В итоге,

$$
S_3 = \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}) \cup \mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t). \tag{11.12}
$$

Из (11.11) и (11.12) вытекает, что

$$
S_1 \cup \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}) = \mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \cup \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}). \tag{11.13}
$$

Пусть $\tilde{\varphi}_t$ – непрерывная на $\Gamma \setminus \{t\}$ функция такая, что $\tilde{\varphi}_t(t-0) = 0$, $\tilde{\varphi}_t(t+0) = 1$. По аналогии с (11.13) доказывается, что

$$
S_1 \cup \tilde{\varphi}_t(\Gamma \setminus \{t\}) = \mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \cup \tilde{\varphi}_t(\Gamma \setminus \{t\}). \tag{11.14}
$$

Функцию $\tilde{\varphi}_t$ выберем так, чтобы $\varphi_t(\Gamma \setminus \{t\}) \cap \tilde{\varphi}_t(\Gamma \setminus \{t\}) = \emptyset$, тогда из (11.13) и (11.14) следует, что

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \Big(S_1 \cup \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\})\Big) \cap \Big(S_1 \cup \tilde{\varphi}_t(\Gamma \setminus \{t\})\Big) \\
&= \Big(\mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \cup \varphi_t(\Gamma \setminus \{t\})\Big) \\
&\cap \Big(\mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \cup \tilde{\varphi}_t(\Gamma \setminus \{t\})\Big) \\
&= \mathcal{L}(0,1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t).
\end{aligned} \tag{11.15}
$$

Для определения множества S_2 положим $\psi_t := 1 - \varphi_t$. Аналогично (11.11) получим, что

$$
S_4 = S_2 \cup \psi_t(\Gamma \setminus \{t\}), \tag{11.16}
$$

где

$$S_4 := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, P_+ + P_-(\psi_t - \lambda)\widetilde{\ }P_- \notin \Phi(X^n(\Gamma, w))\Big\}.$$

С учетом замечания после леммы 8.1 и теоремы 8.5 отсюда получим

$$\begin{aligned} S_4 &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, P_+ + (\psi_t - \lambda)P_- \notin \Phi(X(\Gamma, w))\Big\} \\ &= \mathfrak{R}(\psi_t) \cup \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{R}(\psi_t) \,:\, R_{(\psi_t-\lambda)^{-1}} \notin \Phi(X(\Gamma, w))\Big\} \\ &= \mathfrak{R}(\psi_t) \cup \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{R}(\psi_t) \,:\, 0 \in \operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} R_{(\psi_t-\lambda)^{-1}}\Big\}. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Так как $(\psi_t - \lambda)^{-1}(t-0) = 1/(1-\lambda), (\psi_t - \lambda)^{-1}(t+0) = -1/\lambda$, то из теоремы 10.2 следует, что

$$\operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} R_{(\psi_t-\lambda)^{-1}} = \mathfrak{R}((\psi_t - \lambda)^{-1}) \cup \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-\lambda}, \frac{-1}{\lambda}; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t\right) \cup \{1\}.$$

Ясно, что $0 \notin \mathfrak{R}((\psi_t - \lambda)^{-1}) \cup \{1\}$. Аналогично предыдущему

$$0 \in \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-\lambda}, \frac{-1}{\lambda}; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t\right) \Longleftrightarrow \lambda \in \mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t).$$

Отсюда и из (11.17) следует, что

$$\begin{aligned} S_4 &= \mathfrak{R}(\psi_t) \cup \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{R}(\psi_t) \,:\, \lambda \in \mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t)\Big\} \\ &= \mathfrak{R}(\psi_t) \cup \mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t) \\ &= \psi_t(\Gamma \setminus \{t\}) \cup \mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t). \end{aligned} \tag{11.18}$$

В силу произвольности ψ_t аналогично (11.15) из равенств (11.16) и (11.18) получим

$$S_2 = \mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t). \tag{11.19}$$

Из равенств (11.15) и (11.19) вытекает равенство

$$\operatorname{sp}_{F_t} x = S_1 \cup S_2 = \mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t).$$

Так как лист $\mathcal{L}(0, 1; \alpha_X + \alpha_t, \beta_X + \beta_t)$ не разделяет плоскость, то по следствию из теоремы 10.18 [32] $\operatorname{sp}_{F_t} x = \operatorname{sp}_{W_t} x$. ■

11.5. Символьное исчисление

Рассмотрим “пучок листов”

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{X(\Gamma,w)} := \bigcup_{t\in\Gamma} \Big(\{t\} \times \mathcal{L}(0,1;\alpha_X+\alpha_t,\beta_X+\beta_t) \Big).$$

Теорема 11.5. *(а) Для каждой точки* $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$ *отображение*

$$\sigma_{t,\mu} \,:\, \{S\} \cup \{aI \,:\, a \in PC_n(\Gamma)\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

определяемое равенствами

$$\sigma_{t,\mu}(S) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{t,\mu}(aI) =$$

$$\begin{pmatrix} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu)+a(t-0)\mu \end{pmatrix},$$

продолжается до (непрерывного) гомоморфизма $\sigma_{t,\mu} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ *банаховых алгебр, ядро которого содержит идеал* $\mathcal{K}$*;*

(б) оператор $A \in \mathfrak{A}$ *нетеров в пространстве* $X^n(\Gamma,w)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\det \sigma_{t,\mu}(A) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}; \tag{11.20}$$

(в) фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ *обратимо замкнута (наполнена) в алгебре Калкина* $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$*, т.е. если класс смежности* $A+\mathcal{K} \in \mathfrak{A}/\mathcal{K}$ *обратим в алгебре* $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$*, то* $(A+\mathcal{K})^{-1} \in \mathfrak{A}/\mathcal{K}$*.*

Доказательство. Фиксируем $t \in \Gamma$. Очевидно, что $cP_+ = P_+cI, c\hat{\chi}_tI = \hat{\chi}_tcI$ для любой матрицы $c \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно, $cp = pc$ и $cq = qc$, где p и q – два проектора, определенные формулами (11.3). Обозначим через W_t алгебру, порожденную проекторами p, q и подалгеброй $\mathbb{C}^{n\times n}$. Ясно, что $W_t \subset F_t = \mathfrak{D}^\pi/J_t$. По лемме 11.4 $\mathrm{sp}_{F_t}\, x = \mathcal{L}(0,1;\alpha_X+\alpha_t,\beta_X+\beta_t)$, где элемент x алгебры F_t определен формулой (11.6). Таким образом, мы можем применить теорему о двух проекторах.

По теореме 11.3(а) для любого $\mu \in \mathcal{L}(0,1;\alpha_X+\alpha_t,\beta_X+\beta_t)$ отображение $\sigma_\mu : \mathbb{C}^{n\times n} \cup \{p,q\} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, определяемое формулами (11.4) и (11.5), продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр $\sigma_\mu : W_t \to \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Тогда отображение

$$\sigma_{t,\mu} = \sigma_\mu \circ \pi_t : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

где $\pi_t : \mathfrak{A} \to W_t = \mathfrak{A}^\pi / J_t$ действует по правилу $A \mapsto A^\pi + J_t$, является корректно определенным гомоморфизмом банаховых алгебр. Причем

$$\sigma_{t,\mu}(S) = 2\sigma_\mu p - \sigma_\mu e = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}.$$

Если $a \in PC_n(\Gamma)$, то в силу (11.2) и того, что $(aI)^\pi - (a_t I)^\pi \in J_t$, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{t,\mu}(aI) &= \sigma_{t,\mu}(a_t I) = \sigma_\mu(a(t-0))\sigma_\mu(e-q) + \sigma_\mu(a(t+0))\sigma_\mu q \\
&= \begin{pmatrix} a(t-0) & O \\ O & a(t-0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\mu)E & -\sqrt{\mu(1-\mu)}E \\ -\sqrt{\mu(1-\mu)}E & \mu E \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} a(t+0) & O \\ O & a(t+0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu E & \sqrt{\mu(1-\mu)}E \\ \sqrt{\mu(1-\mu)}E & (1-\mu)E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0)-a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu) + a(t-0)\mu \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Утверждение (а) доказано.

Докажем утверждение (б). Нетеровость оператора $A \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}$ в пространстве $X^n(\Gamma, w)$ эквивалентна обратимости класса смежности A^π в фактор-алгебре $\mathfrak{D}^\pi = \mathfrak{D}/\mathcal{K}$, где $\mathfrak{D}$ – алгебра операторов локального типа. По теореме 11.2 это эквивалентно обратимости $\pi_t(A) = A^\pi + J_t$ в фактор-алгебре $F_t = \mathfrak{D}^\pi / J_t$ для любого $t \in \Gamma$. По теореме 11.3(б) последнее свойство равносильно выполнению (11.20). Утверждение (б) доказано.

Если класс смежности A^π, где $A \in \mathfrak{A}$, обратим в алгебре Калкина $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$, то по только что доказанному выполнено (11.20). Тогда по теореме 11.3(в) $\pi_t(A) = A^\pi + J_t$ обратим в фактор-алгебре $W_t = \mathfrak{A}^\pi / J_t$ для любого $t \in \Gamma$. Опять применяя теорему 11.2, получим, что A^π обратим в алгебре $\mathfrak{A}^\pi = \mathfrak{A}/\mathcal{K}$. Утверждение (в) доказано. ■

12. Индекс оператора из алгебры СИО

12.1. Символ и его детерминант

Матрицу-функцию $\mathcal{A}(t,\mu) = \sigma_{t,\mu}(A)$ при $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$ будем называть символом оператора $A \in \mathfrak{A}$. Представим его в виде

$$\mathcal{A}(t,\mu) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(t,\mu) & \mathcal{A}_{12}(t,\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(t,\mu) & \mathcal{A}_{22}(t,\mu) \end{pmatrix}, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M},$$

где $\mathcal{A}_{ij}(t,\mu)$ – $n \times n$ матрицы-функции.

Семейство гомоморфизмов $\sigma_{t,\mu}$, вообще говоря, не является равномерно ограниченным по $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$. Однако этим свойством обладают функции $\det \mathcal{A}$, $\det \mathcal{A}_{ii} (i = 1, 2)$. Более точно, если обозначить через

$$|B| := \inf_{T \in \mathcal{K}} \|B + T\|_{\mathfrak{B}}$$

существенную норму оператора $B \in \mathfrak{B}$ (т.е. норму класса смежности $B + \mathcal{K}$ в алгебре Калкина $\mathfrak{B}/\mathcal{K}$), а через

$$\|a\| := \sup_{(t,\mu) \in \mathfrak{M}} |a(t,\mu)|$$

– sup-норму функции $a : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$, то имеют место следующие теоремы:

Теорема 12.1. *Если $A \in \mathfrak{A}$, то*

$$\|\det \mathcal{A}\| \le (2n)!(K|A|)^{2n}, \qquad \|\det \mathcal{A}_{ii}\| \le n!(K|A|)^n \quad (i = 1, 2),$$

где $K := \left(\max\{\|P_+\|_{\mathfrak{B}}, \|P_-\|_{\mathfrak{B}}\}\right)^2$.

Теорема 12.2. *Пусть последовательность операторов $A_s \in \mathfrak{A}$ равномерно сходится к оператору A, и $\mathcal{A}^{(s)}$ – последовательность символов* *операторов A_s. Тогда последовательность функций* $\det\mathcal{A}^{(s)}$ *(*$\det\mathcal{A}_{11}^{(s)}$*,* $\det\mathcal{A}_{22}^{(s)}$*) равномерно сходится на множестве* $\mathfrak{M}$ *к функции* $\det\mathcal{A}$ *(соответственно, к функции* $\det\mathcal{A}_{11}$*,* $\det\mathcal{A}_{22}$*).*

Для доказательства теорем 12.1 и 12.2 потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через v_i диагональную матрицу размерности $n\times n$, у которой элемент, стоящий на i-ом месте равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Операторы

$$Z_1(A;i,j) := P_+v_iAv_jP_+, \quad Z_2(A;i,j) := P_+v_iAv_jP_-,$$
$$Z_3(A;i,j) := P_-v_iAv_jP_+, \quad Z_4(A;i,j) := P_-v_iAv_jP_-,$$

где $1\le i,j\le n$, будем называть элементарными операторами, ассоциированными с оператором A.

Лемма 12.3. *Пусть операторы* $A,B\in\mathfrak{A}$*, пусть*

$$A_l = Z_k(A;i,j), \quad B_l = Z_k(B;i,j), \quad l=\overline{1,m},$$

где тройка $\{i,j,k\}$ *зависит от* l *и* $1\le k\le 4, 1\le i,j\le n$*. Тогда*

$$|A_1A_2\dots A_m - B_1B_2\dots B_m| \le K^m|A-B|\sum_{l=1}^m |B|^{l-1}|A|^{m-l}. \quad (12.1)$$

Доказательство. По индукции доказывается, что

$$|A_1\dots A_m - B_1\dots B_m| \le \sum_{l=1}^m\left(\prod_{j=1}^{l-1}|B_j|\cdot|A_l-B_l|\cdot\prod_{j=l+1}^m|A_j|\right). \quad (12.2)$$

Пусть $1\le l\le m$. Тогда с учетом определения постоянной K

$$|A_l-B_l| = |Z_k(A-B;i,j)| \le K|A-B|. \quad (12.3)$$

Следовательно, $|A_l|\le K|A|, |B_l|\le K|B|$. Отсюда и из неравенств (12.2), (12.3) вытекает неравенство (12.1). ■

Обозначим через $J(a;i,j)$ матрицу размерности $2n\times 2n$, у которой элемент, стоящий в i строке и j столбце, равен a, а все остальные элементы равны нулю. Представим символ $\mathcal{A}$ произвольного оператора $A \in \mathfrak{A}$ в виде

$$\mathcal{A}(t,\mu) = \Big(a_{ij}(t,\mu)\Big)_{i,j=1}^{2n}, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}.$$

Вычислим символы элементарных операторов $(1 \le i, j \le n)$:

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{Z}_1(A;i,j)\Big)(t,\mu) &= J(1;i,i)\mathcal{A}(t,\mu)J(1;j,j) \\ &= J(a_{ij}(t,\mu);i,j), \qquad (12.4) \\ \Big(\mathcal{Z}_2(A;i,j)\Big)(t,\mu) &= J(1;i,i)\mathcal{A}(t,\mu)J(1;j+n,j+n) \\ &= J(a_{i,j+n}(t,\mu);i,j+n), \qquad (12.5) \\ \Big(\mathcal{Z}_3(A;i,j)\Big)(t,\mu) &= J(1;i+n,i+n)\mathcal{A}(t,\mu)J(1;j,j) \\ &= J(a_{i+n,j}(t,\mu);i+n,j), \qquad (12.6) \\ \Big(\mathcal{Z}_4(A;i,j)\Big)(t,\mu) &= J(1;i+n,i+n)\mathcal{A}(t,\mu)J(1;j+n,j+n) \\ &= J(a_{i+n,j+n}(t,\mu);i+n,j+n). \qquad (12.7) \end{aligned}$$

Таким образом, матрицы вида $J(a_{ij}(t,\mu);i,j)$, где $a_{ij}(t,\mu)$ – (i,j)-элемент символа $\mathcal{A}(t,\mu)$, также являются символами операторов из алгебры $\mathfrak{A}$.

Лемма 12.4. *Пусть A – оператор из алгебры $\mathfrak{A}$, символ которого имеет вид*

$$\mathcal{A}(t,\mu) = J(a(t,\mu);i,i), \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}, \quad 1 \le i \le 2n.$$

Тогда $\|a\| \le |A|$.

Доказательство. Идея доказательства заимствована из [8, теорема 4.1]. Допустим, что существует точка $(t_0,\mu_0) \in \mathfrak{M}$, для которой $|A| < |a(t_0,\mu_0)|$. В этом случае $|A|/|a(t_0,\mu_0)| < 1$. Тогда оператор $B = I - (a(t_0,\mu_0))^{-1}A$ нетеров, а его символ – диагональная матрица

$$\mathcal{B}(t,\mu) = \operatorname{diag}\left\{1,\ldots,1,1-\frac{a(t,\mu)}{a(t_0,\mu_0)},1,\ldots,1\right\},$$

где на i месте стоит элемент $1 - a(t,\mu)/a(t_0,\mu_0)$. Следовательно,

$$\det \mathcal{B}(t_0,\mu_0) = 1 - a(t_0,\mu_0)/a(t_0,\mu_0) = 0,$$

что противоречит теореме 11.5(б). ∎

Лемма 12.5. *Если* $A, B \in \mathfrak{A}$, *то* $\|a_{ii} - b_{ii}\| \le K|A-B|$ *для всех* $i = \overline{1,2n}$.

Доказательство. Если $1 \le i \le n$, то из леммы 12.4 и равенств (12.4), (12.7) вытекает

$$\|a_{ii} - b_{ii}\| \le |Z_1(A-B;i,i)|, \quad \|a_{i+n,i+n} - b_{i+n,i+n}\| \le |Z_4(A-B;i,i)|.$$

Применив к правым частям последних двух неравенств лемму 12.3 при $m=1$, получим требуемое утверждение. ∎

Обозначим через $\mathfrak{S}_{2n}$ симметрическую группу перестановок степени $2n$. Пусть даны различные натуральные числа

$$1 \le p_1 < \cdots < p_m \le 2n.$$

Циклом $(p_1,\ldots,p_m) \in \mathfrak{S}_{2n}$ называется перестановка, действующая по правилу: элементы, отличные от $p_i, i=\overline{1,m}$, переходят в себя; p_i переходит в $p_{i+1}, i = \overline{1,m-1}$, а p_m переходит в p_1. Число m называется длиной цикла. Обозначим

$$C_{A,(p_1,\ldots,p_m)}(t,\mu) := a_{p_1p_2}(t,\mu)\cdot\ldots\cdot a_{p_{m-1}p_m}(t,\mu)\cdot a_{p_mp_1}(t,\mu).$$

Лемма 12.6. *Если* $A, B \in \mathfrak{A}$ *и* $(p_1,\ldots,p_m) \in \mathfrak{S}_{2n}$ *– цикл длины* m, *то*

$$\|C_{A,(p_1,\ldots,p_m)} - C_{B,(p_1,\ldots,p_m)}\| \le K^m|A-B|\sum_{l=1}^{m}|B|^{l-1}|A|^{m-l}.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$J(a_{p_1p_2}(t,\mu);p_1,p_2)\cdot\ldots\cdot J(a_{p_{m-1}p_m}(t,\mu);p_{m-1},p_m)\times$$
$$\times J(a_{p_mp_1}(t,\mu);p_m,p_1) = J(C_{A,(p_1,\ldots,p_m)}(t,\mu);p_1,p_1), \tag{12.8}$$

$$J(b_{p_1p_2}(t,\mu);p_1,p_2)\cdot\ldots\cdot J(b_{p_{m-1}p_m}(t,\mu);p_{m-1},p_m)\times$$
$$\times J(b_{p_mp_1}(t,\mu);p_m,p_1)=J(C_{B,(p_1,\ldots,p_m)}(t,\mu);p_1,p_1). \qquad (12.9)$$

Каждая матрица, стоящая в левой части равенства (12.8) (соответственно, (12.9)), является символом элементарного оператора $A_l, l=\overline{1,m}$ (соответственно, B_l), ассоциированного с оператором A (соответственно, B) по формулам (12.4) – (12.7). В итоге, из равенств (12.8), (12.9) вытекает, что

$$J(C_{A,(p_1,\ldots,p_m)}(t,\mu)-C_{B,(p_1,\ldots,p_m)}(t,\mu);p_1,p_1)$$
$$=\sigma_{t,\mu}\left(A_1A_2\ldots A_m-B_1B_2\ldots B_m\right).$$

По лемме 12.4

$$\|C_{A,(p_1,\ldots,p_m)}-C_{B,(p_1,\ldots,p_m)}\|\le\left|A_1A_2\ldots A_m-B_1B_2\ldots B_m\right|.$$

Применив к правой части последнего неравенства лемму 12.3, получим требуемое утверждение. ■

Доказательство теоремы 12.2. Из выражения определителя через элементы матрицы вытекает, что

$$\left\|\det\mathcal{A}-\det\mathcal{A}^{(s)}\right\|\le\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{2n}}\left\|\prod_{j=1}^{2n}a_{ji_j}-\prod_{j=1}^{2n}a_{ji_j}^{(s)}\right\|, \qquad (12.10)$$

где $i_j=\pi(j)$. Перестановку $\pi\in\mathfrak{S}_{2n}$, отличную от тождественной, разложим в произведение независимых циклов:

$$\pi=\begin{pmatrix}1&\ldots&2n\\ i_1&\ldots&i_{2n}\end{pmatrix}=\left(p_1^{(1)},\ldots,p_{m(1)}^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_1^{(r)},\ldots,p_{m(r)}^{(r)}\right), \qquad (12.11)$$

где r – число циклов, $m(l)$ – длина l-го цикла. Обозначим через k число элементов, остающихся на месте под действием перестановки π. Очевидно,

$$k=2n-\sum_{l=1}^{r}m(l). \qquad (12.12)$$

Для тождественной перестановки $r=0, k=2n$. Рассмотрим множество

$$\{q_1,\ldots,q_k\} := \{1,\ldots,2n\} \setminus \bigcup_{l=1}^{r} \left\{p_1^{(l)},\ldots,p_{m(l)}^{(l)}\right\}.$$

Обозначим

$$C_l(t,\mu) := C_{A,\left(p_1^{(l)},\ldots,p_{m(l)}^{(l)}\right)}(t,\mu), \quad C_l^{(s)}(t,\mu) := C_{A_s,\left(p_1^{(l)},\ldots,p_{m(l)}^{(l)}\right)}(t,\mu).$$

Аналогично (12.2) оценим каждое слагаемое, стоящее в формуле (12.10) справа:

$$\begin{aligned}&\left\|\prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} - \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j}^{(s)}\right\| = \left\|\prod_{l=1}^{r} C_l \cdot \prod_{l=1}^{k} a_{q_l q_l} - \prod_{l=1}^{r} C_l^{(s)} \cdot \prod_{l=1}^{k} a_{q_l q_l}^{(s)}\right\| \\ &\le \prod_{l=1}^{r}\left\|C_l^{(s)}\right\| \cdot \sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\left\|a_{q_j q_j}^{(s)}\right\| \cdot \left\|a_{q_l q_l} - a_{q_l q_l}^{(s)}\right\| \cdot \prod_{j=l+1}^{k}\left\|a_{q_j q_j}\right\|\right) \\ &+ \prod_{l=1}^{k}\left\|a_{q_l q_l}\right\| \cdot \sum_{l=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\left\|C_j^{(s)}\right\| \cdot \left\|C_l - C_l^{(s)}\right\| \cdot \prod_{j=l+1}^{r}\left\|C_j\right\|\right). \qquad (12.13)\end{aligned}$$

Так как последовательность A_s равномерно сходится к A, то $|A_s| \le 2|A|$ начиная с некоторого номера s_0. Тогда для всех $s \ge s_0$ из леммы 12.5 при $j=\overline{1,k}$ следует, что

$$\left\|a_{q_j q_j} - a_{q_j q_j}^{(s)}\right\| \le K|A-A_s|, \ \left\|a_{q_j q_j}\right\| \le K|A|, \ \left\|a_{q_j q_j}^{(s)}\right\| \le 2K|A|. \qquad (12.14)$$

Из леммы 12.6 для всех $l=\overline{1,r}$ вытекает оценка:

$$\left\|C_l - C_l^{(s)}\right\| \le K^{m(l)}|A-A_s| \sum_{j=1}^{m(l)} |A_s|^{j-1}|A|^{m(l)-j}.$$

Тогда для всех $s \ge s_0$ и всех $l=\overline{1,r}$

$$\|C_l\| \le (K|A|)^{m(l)}, \quad \left\|C_l^{(s)}\right\| \le (K|A_s|)^{m(l)} \le (2K|A|)^{m(l)}, \qquad (12.15)$$

$$\left\|C_l - C_l^{(s)}\right\| \le \left(2^{m(l)}-1\right) K^{m(l)}|A|^{m(l)-1}|A-A_s|. \qquad (12.16)$$

В итоге, из неравенств (12.13) – (12.16) с учетом равенства (12.12) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\left\|\prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} - \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j}^{(s)}\right\| \le \left(2^{2n-k}\sum_{l=1}^{k} 2^{l-1} + \sum_{l=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{l-1} 2^{m(j)} \cdot \left(2^{m(l)}-1\right)\right)\right) \\ &\times K^{2n}|A|^{2n-1}|A-A_s| = \left(2^{2n}-1\right) K^{2n}|A|^{2n-1}|A-A_s|. \qquad (12.17)\end{aligned}$$

Из неравенств (12.10) и (12.17) получаем:

$$\left\|\det\mathcal{A}-\det\mathcal{A}^{(s)}\right\|\le(2n)!\left(2^{2n}-1\right)K^{2n}|A|^{2n-1}|A-A_s|. \qquad (12.18)$$

Осталось показать, что последовательности функций $\det\mathcal{A}_{ii}^{(s)}(i=1,2)$ равномерно сходятся к функциям $\det\mathcal{A}_{ii}$, соответственно. Пусть, например, $i=2$. Рассмотрим последовательность операторов $B_s:=P_++P_-A_sP_-$, равномерно сходящуюся к оператору $B:=P_++P_-AP_-$. Так как $\det\mathcal{B}=\det\mathcal{A}_{22}, \det\mathcal{B}^{(s)}=\det\mathcal{A}_{22}^{(s)}$, то равномерная сходимость $\det\mathcal{A}_{22}^{(s)}\to\det\mathcal{A}_{22}$ вытекает из (12.18). ∎

Доказательство теоремы 12.1. Имеем

$$\|\det\mathcal{A}\|\le\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{2n}}\left\|\prod_{j=1}^{2n}a_{ji_j}\right\|. \qquad (12.19)$$

Если перестановка π разлагается в произведение (12.11), то согласно доказательству теоремы 12.2

$$\left\|\prod_{j=1}^{2n}a_{ji_j}\right\|\le\prod_{l=1}^{r}\|C_l\|\cdot\prod_{j=1}^{k}\|a_{q_jq_j}\|,$$

$$\|C_l\|\le(K|A|)^{m(l)},\qquad \|a_{q_jq_j}\|\le K|A|.$$

Отсюда ввиду (12.19) и (12.12)

$$\|\det\mathcal{A}\|\le\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{2n}}(K|A|)^{2n}=(2n)!(K|A|)^{2n}.$$

Неравенство для блоков $\mathcal{A}_{ii}(i=1,2)$ доказывается аналогично. ∎

12.2. Формула индекса

Теорема о двух проекторах и локальный принцип Аллана-Дугласа не позволяют вычислить индекс произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{A}$. В этом пункте приведем формулу индекса для произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 12.7. *Если оператор $A \in \mathfrak{A}$ нетеров в пространстве $X^n(\Gamma, w)$, то функция*

$$A(t,\mu) := \frac{\det \mathcal{A}(t,\mu)}{\det \mathcal{A}_{22}(t,0) \det \mathcal{A}_{22}(t,1)}, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}$$

обладает следующими свойствами:

(i) $A(t,\mu) \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$;

(ii) $A(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$;

(iii) множество

$$A_{\#} := \mathfrak{R}(A(\cdot,0)) \cup \bigcup_{t \in J_{A(\cdot,0)}} \{z = A(t,\mu) \, : \, \mu \in \mathcal{L}_t(0,1)\},$$

где $J_{A(\cdot,0)}$ – множество скачков функции $A(\cdot,0)$, дуга $\mathcal{L}_t(0,1)$ определяется формулой (10.7), является замкнутой непрерывной естественно ориентированной кривой, не проходящей через начало координат,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{wind} A_{\#}.$$

Замечание. Ориентация на кривой $A_{\#}$ задается по аналогии с заданием ориентации на кривой $a^{\#}$ в пункте 10.3. Так как $A(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$, то на участках непрерывности $A(t,0)$ положительным считается направление, соответствующее изменению t вдоль кривой Γ в положительном направлении. На дополнительных дугах

$$\{z = A(t,\mu) \, : \, \mu \in \mathcal{L}_t(0,1)\},$$

соединяющих предельные значения $A(t-0,0)$ и $A(t+0,0)$, положительным считается направление, соответствующее изменению μ вдоль дуги $\mathcal{L}_t(0,1)$ от точки 0 к точке 1.

Доказательство. Доказательство проводится в несколько этапов по аналогии с [21] (см. также [7, 8]).

Этап 1. Пусть $A = R_a = aP_+ + P_-$, где $a \in PC(\Gamma)$. По теореме 11.5,

$$R_a(t,\mu) = \det \mathcal{R}_a(t,\mu) = a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) \neq 0, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}.$$

Очевидно, что $R_a(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$ и $J_{R_a(\cdot,0)} = J_a$. Отсюда и из (10.3) следует, что

$$(R_a)_\# = \bigcup_{t\in J_{R_a(\cdot,0)}} \{z = a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) \ : \ \mu \in \mathcal{L}_t(0,1)\}$$
$$\cup \ \mathfrak{R}(R_a(\cdot,0)) = \mathfrak{R}(a) \cup \bigcup_{t\in J_a} \mathcal{L}_t(a(t-0), a(t+0)) = a^\#.$$

Множество $a^\#$ является замкнутой непрерывной естественно ориентированной кривой, не проходящей через начало координат. По теореме 10.2

$$\operatorname{Ind} R_a = -\operatorname{wind} a^\# = -\operatorname{wind}(R_a)_\#.$$

Этап 2. Пусть $A = R_c := cP_+ + P_-$, где $c \in C_n(\Gamma)$. В силу теоремы 11.5,

$$R_c(t,\mu) = \det \mathcal{R}_c(t,\mu) = \det c(t) \neq 0, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, матрица-функция c гомотопна диагональной матрице-функции $\tilde{c}(t) = \operatorname{diag}\{t^\varkappa, 1, \dots, 1\}$, где $\varkappa := \{\operatorname{Arg}\det c\}_\Gamma/(2\pi)$ – индекс Коши (см. Добавление VI Б. Боярского [26, с. 484-486]). В силу устойчивости индекса оператора,

$$\operatorname{Ind} R_c = \operatorname{Ind} R_{\tilde{c}} = \operatorname{Ind} R_{t^\varkappa} = -\varkappa.$$

Так как функция $\det c$ непрерывна на Γ, то

$$(R_c)_\# = \mathfrak{R}(R_c(\cdot,0)) = \mathfrak{R}(\det c) = (\det c)^\#,$$

$$\operatorname{wind}(R_c)_\# = \operatorname{wind}(\det c)^\# = \varkappa.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Ind} R_c = -\frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg}\det c\}_\Gamma = -\operatorname{wind}(\det c)^\# = -\operatorname{wind}(R_c)_\#.$$

Этап 3. Пусть $\Lambda(\Gamma)$ – множество всех функций $b \in PC(\Gamma)$, для которых множество точек разрыва J_b конечно. Рассмотрим оператор $A = R_a = aP_+ + P_-$, где $a \in \Lambda_n(\Gamma)$. Из теоремы 11.5 следует, что

$$R_a(t,\mu) = \det \mathcal{R}_a(t,\mu) = \det[a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu)] \neq 0 \quad (12.20)$$

для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$. Так как оператор R_a нетеров в $X^n(\Gamma, w)$, то по аналогии с [37, лемма 2] можно доказать, что $\det a(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. В этом случае, согласно [6, лемма 2], матрица-функция a может быть представлена в виде

$$a(t) = c_1(t)Y(t)c_2(t), \quad t \in \Gamma,$$

где c_i, $i = 1,2$ – непрерывные неособенные матрицы-функции, $Y \in \Lambda_n(\Gamma)$ – верхнетреугольная матрица-функция с элементами y_j, $j = \overline{1,n}$, на главной диагонали. Следовательно,

$$\begin{aligned} R_a(t,\mu) &= \det c_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{n} [y_j(t+0)\mu + y_j(t-0)(1-\mu)] \cdot \det c_2(t) \\ &= R_{c_1}(t,\mu) \cdot \prod_{j=1}^{n} R_{y_j}(t,\mu) \cdot R_{c_2}(t,\mu) \neq 0, \quad (t,\mu) \in \mathfrak{M}. \quad (12.21) \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 11.5 операторы R_{y_j}, $j = \overline{1,n}$, и R_{c_i}, $i = 1,2$, нетеровы в пространствах $X(\Gamma, w)$ и $X^n(\Gamma, w)$, соответственно.

Из этапов 1 и 2, соответственно, мы видим, что $R_{y_j}(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$, $j = \overline{1,n}$, и $R_{c_i}(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$, $i = 1,2$. Кроме того, множества $(R_{y_j})_\#$, $j = \overline{1,n}$, и $(R_{c_i})_\#$, $i = 1,2$, являются замкнутыми непрерывными естественно ориентированными кривыми, не проходящими через начало координат. Тогда в силу (12.21) имеет место $R_a(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$. Кроме того, $(R_a)_\#$ обладает свойствами кривых $(R_{y_j})_\#$ и $(R_{c_i})_\#$. Таким образом, из (12.21) вытекает, что

$$\operatorname{wind}(R_a)_\# = \operatorname{wind}(R_{c_1})_\# + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{wind}(R_{y_j})_\# + \operatorname{wind}(R_{c_2})_\#. \quad (12.22)$$

Из этапов 1 и 2 следует, соответственно, что

$$\operatorname{Ind} R_{y_j} = -\operatorname{wind}(R_{y_j})_\#, \quad j = \overline{1,n}, \quad (12.23)$$

$$\operatorname{Ind} R_{c_i} = -\operatorname{wind}(R_{c_i})_\#, \quad i = 1,2. \quad (12.24)$$

Так как все операторы R_{y_j}, $j=\overline{1,n}$, нетеровы, то оператор R_Y может быть представлен в форме

$$R_Y = R_{\tilde{Y}} R_Z + K, \tag{12.25}$$

где $\tilde{Y}(t)=\mathrm{diag}\{y_1(t),\dots,y_n(t)\}$, Z – верхнетреугольная матрица-функция с единицами на главной диагонали, а K – компактный оператор. Очевидно, что оператор $R_{\tilde{Y}}=\mathrm{diag}\{R_{y_1},\dots,R_{y_n}\}$ нетеров,

$$\mathrm{Ind}\, R_{\tilde{Y}} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}\, R_{y_j}. \tag{12.26}$$

С другой стороны, оператор R_Z обратим. Тогда из (12.25) и (12.26) следует, что

$$\mathrm{Ind}\, R_Y = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}\, R_{y_j}. \tag{12.27}$$

Применяя лемму 7.2, можно доказать, что

$$\mathrm{Ind}\, R_a = \mathrm{Ind}\, R_{c_1} + \mathrm{Ind}\, R_Y + \mathrm{Ind}\, R_{c_2}. \tag{12.28}$$

В итоге, из (12.22)–(12.24) и (12.27)–(12.28) получим

$$\mathrm{Ind}\, R_a = -\,\mathrm{wind}(R_a)_{\#}.$$

Этап 4. Пусть $A = aP_+ + bP_-$, где $a,b\in\Lambda_n(\Gamma)$. Так как оператор A нетеров, то $\det b(t\pm 0)\neq 0$ для всех $t\in\Gamma$. Тогда оператор $R_{b^{-1}a}$ нетеров, $\mathrm{Ind}\, A = \mathrm{Ind}\, R_{b^{-1}a}$. По аналогии с леммой 2.1 [8], можно доказать, что

$$\begin{aligned}\det \mathcal{A}(t,\mu) &= \det \mathcal{A}_{22}(t,0)\det \mathcal{A}_{22}(t,1)\\ &\times\ \det[b^{-1}(t+0)a(t+0)\mu + b^{-1}(t-0)a(t-0)(1-\mu)]\end{aligned}$$

для всех $(t,\mu)\in\mathfrak{M}$. Тогда $A(t,\mu) = R_{b^{-1}a}(t,\mu)$ для всех $(t,\mu)\in\mathfrak{M}$. Следовательно, доказательство сводится к этапу 3.

Этап 5. Пусть

$$A = \sum_{j=1}^{k} A_{j1}A_{j2}\dots A_{jr}, \tag{12.29}$$

где $A_{jl}=a_{jl}P_+ + b_{jl}P_-$ и коэффициенты $a_{jl}, b_{jl} \in \Lambda_n(\Gamma)$, $l=\overline{1,r}$, $k \geq 1$. Этот случай сводится к предыдущему с помощью процедуры линейного растяжения также, как в теореме 3.1 [8].

Этап 6. Пусть A – произвольный нетеров оператор из алгебры $\mathfrak{A}$. По теореме 11.5(c) $\det \mathcal{A}(t,\mu) \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$. Согласно теореме 12.1 функция $\det \mathcal{A}_{22}$ равномерно ограничена на $\mathfrak{M}$. Следовательно, $A(t,\mu) \neq 0$ для всех $(t,\mu) \in \mathfrak{M}$. Оператор A является равномерным пределом последовательности A_s нетеровых операторов вида (12.29) с символами $\mathcal{A}^{(s)}$. В силу теоремы 12.2 последовательности $\det \mathcal{A}^{(s)}$ и $\det \mathcal{A}_{22}^{(s)}$ равномерно сходятся на $\mathfrak{M}$ к функциям $\det \mathcal{A}$ и $\det \mathcal{A}_{22}$, соответственно. В этом случае последовательность функций

$$A_s(t,\mu) := \frac{\det \mathcal{A}^{(s)}(t,\mu)}{\det \mathcal{A}_{22}^{(s)}(t,0)\det \mathcal{A}_{22}^{(s)}(t,1)}$$

равномерно сходится к $A(t,\mu)$ на множестве $\mathfrak{M}$. Согласно этапу 5, $A_s(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$. Более того, $(A_s)_{\#}$ являются замкнутыми непрерывными естественно ориентированными кривыми, не проходящими через начало координат. В силу равномерной сходимости $A_s(t,\mu) \to A(t,\mu)$, функция $A(\cdot,0) \in PC(\Gamma)$, а множество $A_{\#}$ также является замкнутой непрерывной естественно ориентированной кривой, не проходящей через начало координат. Число ее оборотов вокруг нуля

$$\operatorname{wind} A_{\#} = \lim_{s\to\infty} \operatorname{wind}(A_s)_{\#}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Ind} A = \lim_{s\to\infty} \operatorname{Ind} A_s = -\lim_{s\to\infty} \operatorname{wind}(A_s)_{\#} = -\operatorname{wind} A_{\#}. \quad \blacksquare$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Асланов В. Функциональные и сингулярные интегральные операторы со сдвигом в пространствах Орлича: Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Баку, 1992. – 156 с.

[2] Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники ВИНИТИ, Мат. анализ. – 1986. – Т. 24. – С. 3–163.

[3] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 638 с.

[4] Гохберг И. Ц. Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям // Успехи матем. наук. – 1952. – Т. 7, вып. 2. – С. 149–156.

[5] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Спектр сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p // Studia Math. – 1968. – Т. 31. – С. 347–362.

[6] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Системы сингулярных интегральных уравнений в пространствах L_p с весом // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 186, №5. – С. 998–1002.

[7] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Об алгебре, порожденной одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно непрерывными коэффициентами // Функ. анализ и его прилож. – 1970. – Т. 4, вып. 3. – С. 26–36.

[8] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами и их символы // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1971. – Т. 35, №4. – С. 940–964.

[9] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

[10] Городецкий В. В., Нагнибеда Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев: Вища школа, 1990. – 479 с.

[11] Грудский С. М. Сингулярные интегральные уравнения и краевая задача Римана с бесконечным индексом в пространстве $L_p(\Gamma, w)$ // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1985. – Т. 49, №1. – С. 55–80.

[12] Дынькин Е. М. Методы теории сингулярных интегралов (преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда) // Итоги науки и техники ВИНИТИ, Современные проблемы математики. – 1987. – Т. 15. – С. 197–292.

[13] Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники ВИНИТИ, Мат. анализ. – 1983. – Т. 21. – С. 42–129.

[14] Казарян С. С. Неравенства для одной максимальной функции в пространствах Орлича // Изв. АН Арм.ССР. Сер. матем. – 1987. – Т. 22, №4. – С. 358–377.

[15] Казарян С. С. Интегральные неравенства в весовых рефлексивных пространствах Орлича // Изв. АН Арм.ССР. Сер. матем. – 1990. – Т. 25, №3. – С. 261–273.

[16] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 750 с.

[17] Карлович А. Ю. Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивных пространствах Орлича // Докл. АН России. – 1996. – Т. 349, №1. – С. 10–12.

[18] Карлович А. Ю. Сингулярные интегральные операторы в рефлексивных пространствах Орлича на кривых Карлесона // Тезисы докладов Междунар. конференции “Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление”. – Минск. – 1996. – С. 50.

[19] Карлович А. Ю. Об алгебре сингулярных интегральных операторов в рефлексивных пространствах Орлича на кривых Карлесона // Труды Междунар. конференции “Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление”. – Минск. – 1996. – С. 127–132.

[20] Карлович А. Ю. Сингулярные интегральные операторы с линейчатыми коэффициентами в рефлексивных пространствах Орлича // Сиб. мат. журнал. – 1997. – Т. 38, №2. – С. 297–311.

[21] Карлович А. Ю. Об индексе сингулярных интегральных операторов в рефлексивных пространствах Орлича // Мат. заметки. – принята к печати.

[22] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. – Москва: Физматгиз, 1958. – 271 с.

[23] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[24] Лайтерер Ю., Маркус А. С. О нормальной разрешимости сингулярных интегральных операторов в симметричных пространствах // Матем. исслед., Кишинев. – 1972. – Т. 7, вып. 1 (23). – С. 72–82.

[25] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. – Т. 2. – Москва: Наука, 1968. – 624 с.

[26] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.

[27] Привалов И. И. Об одной граничной задаче в теории аналитических функций // Матем. сборник. – 1934. – Т. 41, №4. – С. 519–526.

[28] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. – Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 336 с.

[29] Рабинович В. С. Псевдодифференциальные операторы Меллина и сингулярные интегральные операторы на сложных контурах с осциллирующей касательной // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 321, №5. – С. 692–696.

[30] Рабинович В. С. Сингулярные интегральные операторы на сложных контурах и псевдодифференциальные операторы // Мат. заметки. – 1995. – Т. 58, вып. 1. – С. 67–85.

[31] Рабинович В. С. Алгебры сингулярных интегральных операторов на сложных контурах с узлами, являющимися точками логарифмического завихрения // Изв. РАН, Сер. матем. – 1996. – Т. 60, №6. – С. 169–200.

[32] Рудин У. Функциональный анализ: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1975. – 443 с.

[33] Сейфуллаев Р. К. Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой // Матем. сборник. – 1980. – Т. 112, №2. – С. 147–161.

[34] Семенов Е. М. Одна новая интерполяционная теорема // Функ. анализ и его прилож. – 1968. – Т. 2, вып. 2. – С. 68–80.

[35] Симоненко И. Б. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применения к исследованию сингу-

лярных интегралов в пространствах L^p с весами // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1964. – Т. 28, №2. – С. 277–306.

[36] Симоненко И. Б. Новый общий метод изучения линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // Часть 1: Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1965. – Т. 29. – С. 567–586. Часть 2: Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1965. – Т. 29. – С. 757–782.

[37] Симоненко И. Б. Некоторые общие вопросы в теории краевой задачи Римана // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – Т. 32, №5. – С. 1138–1146.

[38] Симоненко И. Б. Устойчивость весовых относительно сингулярного интеграла Коши свойств функций // Мат. заметки. – 1983. – Т. 33, №3. – С. 409–416.

[39] Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно непрерывными коэффициентами. Нетеровость. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1986. – 64 с.

[40] Хведелидзе Б. В. Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Труды Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР. – 1957. – Т. 23. – С. 129–136.

[41] Хведелидзе Б. В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники ВИНИТИ, Современные проблемы математики. – 1975. – Т. 7. – С. 5–162.

[42] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. – Т. 1: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1985. – 260 с.

[43] Allan G. R. Ideals of vector-valued functions // Proc. London Math. Soc., 3rd ser. – 1968. – V. 18. – P. 193–216.

[44] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. – Boston: Academic Press, 1988. – 469 p.

[45] Böttcher A., Gohberg I., Karlovich Yu. I., Krupnik N., Roch S., Silbermann B., Spitkovsky I. Banach algebras generated by N idempotents and applications // Operator Theory: Advances and Applications. – 1996. – V. 90. – P. 19–54.

[46] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Toeplitz and singular integral operators on Carleson curves with logarithmic whirl points // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 1995. – V. 22. – P. 127–161.

[47] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Toeplitz and singular integral operators on general Carleson Jordan curves // Operator Theory: Advances and Applications. – 1996. – V. 90. – P. 119–152.

[48] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Submultiplicative functions and spectral theory of Toeplitz operators // Integral Transforms and Special Functions. – 1996. – V. 4, no. 1-2. – P. 181–202.

[49] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1997. – 416 p.

[50] Böttcher A., Karlovich Yu. I., Rabinovich V. S. Emergence, persistence, and disappearance of logarithmic spirals in the spectra of singular integral operators // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 1996. – V. 25. – P. 406–444.

[51] Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz Operators. – Berlin: Akademie Verlag, 1989, and Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1990. – 512 p.

[52] Boyd D. W. Spaces between a pair reflexive Lebesgue spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 18. – P. 215–219.

[53] Boyd D. W. The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces // Can. J. Math. – 1967. – V. 19. – P. 599–616.

[54] Boyd D. W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation // Can. J. Math. – 1969. – V. 21. – P. 1245–1254.

[55] Boyd D. W. Indices for the Orlicz spaces // Pacific J. Math. – 1971. – V. 38. – P. 315–323.

[56] Clancey K. P., Gohberg I. Factorization of matrix functions and singular integral operators. – Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1981. – 234 p.

[57] Coburn L. A. Weyl's theorem for non-normal operators // Michigan Math. J. – 1966. – V. 13. – P. 285–286.

[58] David G. Operáteurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe // Ann. Sci. École Norm. Super. – 1984. – V. 17. – P. 157–189.

[59] Douglas R. G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory. – New York: Academic Press, 1972. – 53 p.

[60] Fehér F. A generalized Schur-Hardy inequality on normed Köthe spaces // General inequalities II (E. F. Beckenbach, Ed.). – Basel: Birkhäuser, 1980. – P. 277–286.

[61] Fehér F. Indices of Banach function spaces and spaces of fundamental type // J. Approx. Theory. – 1983. – V. 37. – P. 12–28.

[62] Fehér F., Gaspar D., Johnen H. Der Konjugiertenoperator auf rearrangement-invarianten Funktionräumen // Math. Z. – 1973. – V. 134. – P. 129–141.

[63] Finck T., Roch S., Silbermann B. Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra // Math. Nachr. – 1993. – V. 162. – P. 167–185.

[64] Gogatishvili A., Kokilashvili V. Necessary and sufficient conditions for weighted Orlicz class inequalities for maximal functions and singular integrals // Part 1: Georgian Math. J. – 1995. – V. 2, no. 4. – P. 361–384; Part 2: Georgian Math. J. – 1995. – V. 2, no. 5. – P. 445–468.

[65] Gohberg I., Krupnik N. Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 1993. – V. 17. – P. 514–529.

[66] Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 176. – P. 227–251.

[67] Karlovich A. Yu. Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces // Math. Nachr. – 1996. – V. 179. – P. 187–222.

[68] Karlovich A. Yu. Singular integral operators on Carleson curves: Boyd indices and massive spectra // Mark Krein International Conference "Operator Theory and Applications". – Odessa (Ukraine). – 1997. – P. 48.

[69] Karlovich A. Yu. Singular integral operators with piecewise continuous coefficients in reflexive rearrangement-invariant spaces // Preprint 12/97, Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal, 46 pp., 1997.

[70] Kerman R. A., Torchinsky A. Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function // Studia Math. – 1982. – V. 71, no. 3. – P. 277–284.

[71] Krbec M., Kokilashvili V. Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces. – New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1991. – 233 p.

[72] Krbec M., Opic B., Pick L., Rákosnik J. Some recent results on Hardy type operators in weighted function spaces and related topics Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (H. J. Schmeisser, H. Tribel, Ed.). – Stuttgart, Leipzig: Teubner, 1993. – P. 158–184.

[73] Lindberg K. On subspaces of Orlicz sequence spaces // Studia Math. – 1973. – V. 45. – P. 119–143.

[74] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. Function Spaces. – New York, Berlin: Springer Verlag, 1979. – 188 p.

[75] Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M. Factorization of Measurable Matrix Functions. – Berlin: Akademie-Verlag, 1987. – 372 p.

[76] Maligranda L. Indices and interpolation // Dissert. Math. – 1985. – V. 234. – P. 1–49.

[77] Maligranda L. Orlicz spaces and interpolation. – Sem. Math. 5, Dep. Mat., University Estadual de Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989. – 206 p.

[78] Matuszewska W., Orlicz W. On certain properties of φ-functions // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. math. aster. et phys. – 1960. – V. 8, no. 7. – P. 439–443.

[79] Sharpley R. Interpolation of n pairs and counterexamples employing indices // J. Approximation Theory. – 1975. – V. 13. – P. 117–127.

[80] Shimogaki T. A note on norms of compression operators on function spaces // Proc. Japan Acad. – 1970. – V. 46. – P. 239–242.

[81] Spitkovsky I. Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights // J. Funct. Analysis. – 1992. – V. 105. – P. 129–143.

[82] Widom H. Singular integral equations in L^p // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 97. – P. 131–160.

[83] Yaohua D. Singular integral equations in Orlicz spaces (1) // Acta Math. Sci. – 1983. – V. 3, no. 1. – P. 71–83.

[84] Yaohua D. Singular integral equations in Orlicz spaces (2) // Acta Math. Sci. – 1989. – V. 9, no. 2. – P. 215–226.

[85] Zippin M. Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant spaces // J. Functional Analysis. – 1971. – V. 7. – P. 267–284.