ЮЖНО-УКРАИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. К.Д. УШИНСКОГО

На правах рукописи

Карлович Алексей Юрьевич

АЛГЕБРЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КУСОЧНО НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ НА КРИВЫХ КАРЛЕСОНА

01.01.01 – математический анализ

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент А.А. Тарасенко

ОДЕССА 1998

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.

Диссертация посвящена построению теории Нетера для банаховой алгебры сингулярных интегральных операторов с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в перестановочно инвариантных пространствах с весом на кривых Карлесона.

Пусть E – банахово пространство, $\mathfrak{B}(E)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в E. Оператор $A \in \mathfrak{B}(E)$ называется полунетеровым, если его образ $\operatorname{Im} A$ замкнут в E и одно из дефектных чисел

$$n(A) := \dim \ker A, \quad d(A) := \dim \ker A^*$$

конечно. Полунетеров оператор называется нетеровым, если оба дефектных числа конечны. В этом случае индексом оператора A называется число

$$\operatorname{Ind} A := n(A) - d(A).$$

Под построением теории Нетера понимается нахождение критерия нетеровости оператора и формулы для вычисления его индекса. Основные свойства нетеровых операторов обсуждаются в [9, 49, 51], а также во многих других монографиях.

Пусть Γ – простая замкнутая спрямляемая кривая, разбивающая плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Сингулярным интегралом с ядром Коши от суммируемой функции φ называется

$$(S\varphi)(t) := \lim_{R\to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma\setminus\Gamma(t,R)} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \Gamma, \tag{0.1}$$

где $\Gamma(t,R) := \{\tau \in \Gamma : |t-\tau| < R\}$ – порция кривой Γ в открытом круге радиуса R с центром в точке $t \in \Gamma$.

Пусть $E(\Gamma)$ – банахово функциональное пространство на кривой Γ такое, что $L^\infty(\Gamma) \subset E(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$. Предположим, что сингулярный интеграл с ядром Коши порождает в пространстве $E(\Gamma)$ ограниченный оператор S. Допустим, что $S^2 = I$. Тогда операторы $P_{\pm} := (I \pm S)/2$ являются ограниченными проекторами в пространстве $E(\Gamma)$. Пусть $a \in L^{\infty}(\Gamma)$, тогда оператор aI умножения на функцию a ограничен в $E(\Gamma)$. Обозначим $aB := (aI)B$, где $B \in \mathfrak{B}(E(\Gamma))$. Рассмотрим сингулярный интегральный оператор (СИО):

$$R_a := aP_+ + P_-.$$

В силу формул Сохоцкого-Племели исследование оператора R_a эквивалентно исследованию краевой задачи Римана: найти функции $\Phi^{\pm}(z)$ аналитичные в областях $D^{\pm}$, граничные значения которых $\Phi^{\pm}(t)$ удовлетворяют условию

$$\Phi^{-}(t) = a(t)\Phi^{+}(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{0.2}$$

где a, g – заданные на Γ функции. В монографиях Ф. Д. Гахова [3] и Н. И. Мусхелишвили [26] краевая задача Римана исследована в предположении, что Γ – гладкая кривая, заданные функции в граничном условии – гельдеровские или кусочно гельдеровские, а функции $\Phi^{\pm}(z)$ аналитичны в областях $D^{\pm}$. И. И. Привалов [27] предложил рассматривать задачу (0.2) в предположении, что Γ – простая замкнутая спрямляемая кривая, a, g – суммируемые функции, причем $a^{\pm 1} \in L^{\infty}(\Gamma)$, а функции $\Phi^{\pm}(z)$ представимы интегралами Коши в областях $D^{\pm}$.

Следует подчеркнуть, что исследование СИО и исследование краевой задачи Римана в постановке И. И. Привалова эквивалентны в предположении ограниченности оператора S в рассматриваемом пространстве суммируемых функций. Наиболее полно этот вопрос исследован в случае пространств Лебега с весом. Отметим в этом направлении достаточное условие Б. В. Хведелидзе [40]: если Γ – кривая Ляпунова, w – степенной вес, то оператор S ограничен в пространстве $L^p(\Gamma, w), 1 < p < \infty$. В 1973 году Р. Хант, Б. Макенхаупт и Р. Виден доказали [66], что оператор S ограничен в пространстве $L^p(\mathbb{T}, w), 1 < p < \infty$, где $\mathbb{T}$ – единичная окружность, тогда и только тогда, когда w является весом Макенхаупта. В 1982 году Г. Давид доказал [58], что оператор S ограничен в $L^p(\Gamma), 1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда Γ является кривой Карлесона (регулярной кривой Альфорса-Давида), т.е.

$$C_\Gamma := \sup_{t\in\Gamma}\sup_{R>0}\frac{|\Gamma(t,R)|}{R} < \infty, \tag{0.3}$$

где $|\gamma|$ означает меру Лебега множества $\gamma \subset \Gamma$. Более подробно история вопроса изложена в обзорах [12, 13, 41]. Из результата Г. Давида и схемы, изложенной в [12, 13], вытекает, что оператор S ограничен в пространстве $L^p(\Gamma, w), 1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда Γ – кривая Карлесона, w – вес Макенхаупта (подробное изложение см. в [49]).

Естественным обобщением пространств Лебега являются перестановочно инвариантные (симметричные) пространства, возникающие в связи с вопросами теории интерполяции линейных операторов (см. обзор [2]). Основные сведения из теории перестановочно инвариантных пространств содержатся, например, в монографиях Ч. Беннетта и Р. Шарпли [44], Дж. Линденштраусса и Л. Цафрири [74], С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [23]. Основными интерполяционными характеристиками перестановочно инвариантных пространств являются индексы Бойда α_X, β_X. Д. Бойд доказал [53], что оператор S ограничен в перестановочно инвариантном пространстве $X(\mathbb{R})$ на вещественной оси $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда индексы Бойда нетривиальны:

$$0 < \alpha_X \le \beta_X < 1. \tag{0.4}$$

Ф. Фехер, Д. Гаспар, Г. Джонен [62] перенесли этот результат на случай пространства $X(\mathbb{T})$. Интересным примером перестановочно инвариантных пространств являются пространства Орлича (см., например, [22, 44, 76]). Д. Яохуа доказал [83], что если Γ – кривая Ляпунова, то оператор S ограничен в пространстве Орлича $L^{\Phi}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $L^{\Phi}(\Gamma)$ рефлексивно, что в случае пространств Орлича эквивалентно (0.4).

Различные обобщения условия Макенхаупта на случай весовых пространств Орлича и их связь с ограниченностью максимальных функций и сингулярных интегралов рассмотрены в работах [14, 15, 64, 70, 71, 72]. Однако вопрос о критерии ограниченности оператора S в пространстве Орлича с весом и, тем более, в общем перестановочно инвариантном пространстве с весом остается открытым.

В начале 50-х годов И. Ц. Гохберг доказал [4], что существенный спектр оператора R_a с непрерывным коэффициентом a в пространстве Лебега совпадает с образом функции a, дополненным единицей. Исследование СИО с кусочно непрерывными, т.е. имеющими конечные односторонние пределы в каждой точке контура Γ, коэффициентами (будем обозначать этот класс коэффициентов через $PC(\Gamma)$) в пространствах Лебега со степенным весом на кривых Ляпунова было начато Б. В. Хведелидзе [40]. В 60-е – начале 70-х годов Г. Видом и И. Ц. Гохберг-Н. Я. Крупник построили теорию Нетера для СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах Лебега $L^p(\Gamma, w)$ со степенным весом w на кривой Ляпунова Γ [5, 6, 9, 82]. В этой теории существенный спектр СИО совпадает с объединением единицы и существенного образа коэффициента, дополняемого в точках разрыва дугами окружностей, зависящими от p и w. И. Ц. Гохберг и Н. Я. Крупник также исследовали банахову алгебру СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами [7, 8].

В случае $a \in PC(\Gamma)$ в работе [5] (см. также уточненную формулировку в [9, гл. 9, §11]) с помощью интерполяционной теоремы Е. М. Семенова [34] из результатов о нетеровости оператора R_a в пространствах Лебега получено достаточное условие нетеровости оператора R_a в симметричном пространстве (т.е. перестановочно инвариантном пространстве, в котором не обязательно выполняется свойство Фату). СИО с непрерывными коэффициентами в пространствах Орлича и симметричных пространствах на кривых Ляпунова рассматривались в работах [1, 24, 84].

В начале 90-х годов И. М. Спитковский [81] обнаружил феномен появления массивных локальных спектров у СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах $L^p(\Gamma, w)$ на гладкой кривой Г с весом Макенхаупта w: дуга окружности заменяется рожком, зависящим от веса. В 1994 году А. Беттчер и Ю. И. Карлович [46] обнаружили еще один новый эффект: преобразование дуг окружностей и рожков в спирали и спиралевидные рожки при переходе от гладких кривых к кривым Карлесона, допускающим точки логарифмического завихрения. В 1995 году они доказали, что для произвольных кривых Карлесона в безвесовом случае спиралевидные рожки преобразуются в так называемые логарифмические листы, ограниченные кусками двойных логарифмических спиралей [47], а для произвольных кривых Карлесона и общих весов Макенхаупта существенный спектр сингулярного интегрального оператора содержит логарифмические листы с "гало" (общие листы) [48, 49].

Переход от пространств Лебега к рефлексивным пространствам Орлича также вызывает появление массивных спектров у СИО с кусочно непрерывными коэффициентами. В 1994 году автор доказал [17, 20], что в случае кривой Ляпунова существенный спектр оператора R_a, где $a \in PC(\Gamma)$, состоит из объединения единицы и существенного образа коэффициента a, дополняемого в точках разрыва рожками, зависящими от индексов Бойда пространства Орлича. В случае логарифмических кривых Карлесона эти рожки преобразуются в спиралевидные рожки, зависящие как от индексов Бойда, так и от индексов спиралевидности контура в точках разрыва коэффициента [67]. В работах [18, 19] рассмотрено условие, связывающее индексы Бойда рефлексивного пространства Орлича и индексы спиралевидности кривой Карлесона, которое приводит к логарифмическим листам между предельными значениями коэффициента. В работах [68, 69] эти результаты переносятся на случай рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с нетривиальными индексами Бойда.

Если вычислен существенный спектр оператора R_a, $a \in PC(\Gamma)$, то с помощью ставших уже стандартными методов: теоремы о двух проекторах [63, 65] (историю вопроса и дальнейшие обобщения на случай N проекторов см. в [45]) и локального принципа Аллана-Дугласа [43, 59] (см. также [51, гл. 1]), – можно изучить банахову алгебру СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами (см. [49, гл. 8], [67, 69]).

Предлагаемая работа посвящена изложению перечисленных выше результатов и их обобщению на случай рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с весом на жордановой кривой Карлесона. В диссертации впервые предпринята попытка с единых позиций взглянуть на три фактора, влияющих на массивность существенного спектра оператора R_a: пространство, кривую, вес.

Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на параграфы (используется сквозная нумерация параграфов). Первая глава посвящена вопросам ограниченности взвешенного оператора сингулярного интегрирования в перестановочно инвариантном пространстве с весом.

Первые два параграфа являются вспомогательными. В первом параграфе приводятся необходимые сведения из теории перестановочно инвариантных пространств с весом. Во втором параграфе вводится ключевое понятие – полумультипликативная функция и ее индексы. Далее рассматриваются интерполяционные характеристики перестановочно инвариантных пространств – индексы Бойда и Зиппина, являющиеся индексами некоторых полумультипликативных функций.

В третьем параграфе вводится аналог класса Макенхаупта $A_X(\Gamma)$ и доказывается, что для ограниченности оператора S в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$ необходимо, чтобы $w \in A_X(\Gamma)$. Обратно, если вес w принадлежит классам Макенхаупта $A_{\frac{1}{\alpha_X}}(\Gamma)$ и $A_{\frac{1}{\beta_X}}(\Gamma)$, где $\alpha_X, \beta_X \in (0,1)$ – индексы Бойда перестановочно инвариантного пространства $X(\Gamma)$, то оператор S ограничен в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$. В заключение доказывается обобщение теоремы Г. Давида [58] об ограниченности оператора S в перестановочно инвариантном пространстве $X(\Gamma)$ с нетривиальными индексами Бойда: необходимо и достаточно, чтобы Γ была кривой Карлесона.

В 1995 г. А. Беттчер и Ю. И. Карлович [47] связали с весом ψ, имеющим только один разрыв в точке $t \in \Gamma$ полумультипликативную функцию $W_t\psi$ (преобразование W функции ψ в точке t). Индексы этой функции при $\psi(\tau) = \eta_t(\tau) := e^{-\arg(\tau - t)}$ характеризуют степень закрученности кривой в точке t и называются индексами спиралевидности кривой в точке t. В работах [48, 49] рассмотрены интегральные аналоги преобразования W: преобразования V^0 и U веса ψ в точке t, позволяющие расширить класс рассматриваемых весов и выразить в терминах индексов полумультипликативных функций $V_t^0(\varphi_{t,\gamma}w)$ и $U_t(\varphi_{t,\gamma}w)$ условия принадлежности веса $\varphi_{t,\gamma}(\tau)w(\tau) := |(\tau - t)^\gamma|w(\tau)$ классу Макенхаупта $A_p(\Gamma)$.

В четвертом параграфе вводится новое преобразование Q, являющееся аналогом преобразования U в случае перестановочно инвариантных пространств, и устанавливается связь между индексами полумультипликативных функций $W_t\psi$, $Q_t w$ и $Q_t(\psi w)$. В заключение вводится локальный аналог $A_X(\Gamma, t)$ класса $A_X(\Gamma)$ и показывается, что принадлежность веса классу $A_X(\Gamma, t)$ влечет регулярность (т.е. ограниченность в окрестности единицы) полумультипликативной функции $Q_t\psi$ и принадлежность ее индексов сегменту $[0, 1]$.

В пятом параграфе доказывается, что если $w \in A_X(\Gamma)$, то $\log w$ имеет ограниченную среднюю осцилляцию. Кроме того, в этом параграфе приводятся необходимые сведения о преобразовании V^0, а также изучается связь между индексами полумультипликативных функций $V_t^0\psi$ и $Q_t\psi$.

В шестом параграфе обобщается понятие индикаторных функций, введенных в [49, гл. 3]. Вводятся индикаторные функции $\alpha_t(x)$ и $\alpha_t^*(x)$ ($\beta_t(x)$ и $\beta_t^*(x)$) как нижний (верхний) индекс полумультипликативных функций $V_t^0(\eta_t^x w)$ и $Q_t(\eta_t^x w)$, соответственно. С помощью результатов параграфов 4-5 устанавливаются соотношения между этими функциями. В терминах индикаторных функций доказаны условия ограниченности оператора $\varphi_{t,\gamma} S \varphi_{t,\gamma}^{-1} I$, где $\varphi_{t,\gamma}(\tau) = |(\tau - t)^\gamma|, \gamma \in \mathbb{C}$, в перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$. В заключение сформулировано так называемое условие распадения индикаторных функций:

$$\alpha_t^*(\operatorname{Im}\gamma) = \alpha_X + \alpha_t(\operatorname{Im}\gamma), \quad \beta_t^*(\operatorname{Im}\gamma) = \beta_X + \beta_t(\operatorname{Im}\gamma)$$

для всех $\gamma \in \mathbb{C}$ таких, что $\varphi_{t,\gamma} w \in A_X(\Gamma, t)$. Условие распадения индикаторных функций выполняется, в частности, в случае пространств Лебега с общим весом Макенхаупта на произвольной кривой Карлесона. При выполнении условия распадения необходимое условие ограниченности оператора $\varphi_{t,\gamma} S \varphi_{t,\gamma}^{-1} I$ почти совпадает с достаточным.

Вторая глава посвящена построению теории Нетера для оператора R_a в рефлексивном перестановочно инвариантном пространстве с весом $X(\Gamma, w)$. В седьмом параграфе устанавливается ряд вспомогательных утверждений, связанных с оператором S в сепарабельных и рефлексивных перестановочно инвариантных пространствах с весом $X(\Gamma, w)$.

В восьмом параграфе на случай рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с весом обобщаются основные результаты о нетеровости оператора R_a, где a – ограниченная измеримая функция, хорошо известные для пространств Лебега с весом (см., например, [9, гл. 7–8], [49, гл. 6]). Доказано, что для полунетеровости оператора R_a необходимо, чтобы $a^{-1} \in L^\infty(\Gamma)$, если это выполняется, то справедлив аналог теоремы Кобурна-Симоненко (см. [37, 57]): одно из дефектных чисел равно нулю. В этом параграфе доказаны также критерий нетеровости оператора R_a с непрерывным коэффициентом a и принцип разделения особенностей.

Основными инструментами при изучении СИО с кусочно непрерывными коэффициентами являются локальный принцип и теорема о факторизации ограниченной измеримой функции. И. Б. Симоненко [36] (см. также [39]) построил общую теорию операторов локального типа и получил приложения этой теории к изучению СИО. Позднее И. Ц. Гохберг и Н. Я. Крупник [9, гл. 12] развили локальный метод И. Б. Симоненко для изучения локальной обратимости в банаховых алгебрах с нетривиальным центром. В пункте 8.6 дана реализация локального принципа для рефлексивных перестановочно инвариантных пространств с весом с использованием локального принципа, разработанного И. Ц. Гохбергом и Н. Я. Крупником.

В середине 60-х годов И. Б. Симоненко доказал [35, 37], что нетеровость СИО с ограниченным измеримым коэффициентом в пространстве Лебега эквивалентна факторизуемости коэффициента. Различные вопросы факторизации матриц-функций обсуждаются в монографиях [56, 75]. В пункте 8.7 доказано, что нетеровость оператора R_a в рефлексивном перестановочно инвариантном пространстве с весом эквивалентна существованию соответствующим образом определенной факторизации коэффициента $a \in L^\infty(\Gamma)$.

В девятом параграфе для кусочно непрерывной функции a, обратимой в $L^\infty(\Gamma)$, подбирается локально эквивалентная ей в точке $t \in \Gamma$ степенная функция $g_{t,\gamma}(\tau) = \tau^\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, с одним разрывом в точке t. Затем в терминах индикаторных функций α_t^*, β_t^* и α_t, β_t доказываются, соответственно, необходимое и достаточное условия факторизуемости функции $g_{t,\gamma}$.

В десятом параграфе с помощью результатов восьмого и девятого параграфов устанавливается критерий нетеровости оператора R_a, где $a \in PC(\Gamma)$, в случае выполнения условия распадения индикаторных функций. Отсюда вытекает один из основных результатов диссертации: при условии распадения существенный спектр оператора R_a (т.е. спектр в фактор-алгебре по идеалу компактных операторов) состоит из объединения единицы и существенного образа функции $a \in PC(\Gamma)$, дополненного в точках разрыва массивными множествами – листами (ср. [49, гл. 7]). В заключение получена формула для вычисления индекса оператора R_a с коэффициентом $a \in PC(\Gamma)$, а также описан его спектр.

Следует отметить, что кроме изложенного метода изучения СИО, основанного на факторизационной технике и теории полумультипликативных функций, в пространствах Лебега существует и другой подход, основанный на применении преобразования Меллина, техники псевдодифференциальных операторов и предельных операторов (см. [29, 30, 31, 50]). На основе этого подхода удается исследовать СИО в ситуациях, когда одновременно коэффициенты, контур и вес являются слабо осциллирующими. Однако этот метод не позволяет пока рассмотреть случай произвольных кривых Карлесона и общих весов Макенхаупта, рассмотренный в [49] и обобщенный в настоящей работе.

В третьей главе изучается банахова алгебра $\mathfrak{A}$ СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами. В одиннадцатом параграфе с помощью локального принципа Аллана-Дугласа и теоремы о двух проекторах Финка-Роха-Зильберманна и Гохберга-Крупника построено символьное исчисление для алгебры $\mathfrak{A}$ и получен критерий нетеровости в терминах невырожденности символа.

В двенадцатом параграфе, действуя по схеме [7, 8], вычислен индекс произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{A}$ в терминах кривой, строящейся по символу. Число оборотов этой кривой вокруг нуля против часовой стрелки и дает индекс оператора со знаком "–". Основная сложность при этом состоит в обосновании непрерывности кривой, строящейся по символу. Эта сложность связана с тем, что, в отличие от случая кривой Ляпунова (см. [7, 8]), в случае произвольной кривой Карлесона из равномерной сходимости операторов, вообще говоря, не вытекает равномерная сходимость элементов символа. Однако непрерывность нужной кривой удается обосновать, доказав равномерную сходимость детерминантов символа.

В конце диссертации приводится список литературы, содержащий 85 наименований.

По теме диссертации автором опубликованы работы [17, 18, 19, 20, 67, 68, 69], работа [21] принята к печати.

Полученные результаты докладывались автором 1) дважды на семинаре по функциональному анализу и теории операторов в Техническом университете Хемниц-Цвиккау, руководитель – проф. Б. Зильберманн (Хемниц, ФРГ, январь, ноябрь 1994 г.); 2) дважды на семинаре по теории операторов в Высшем техническом институте Лиссабона, руководитель – проф. А. Ф. Сантуш (Лиссабон, Португалия, июль 1994 г., июль 1997 г.); 3) на семинаре по теории сингулярных интегральных уравнений в Одесском государственном университете, руководитель – проф. В. Д. Диденко (Одесса, март 1995 г.); 4) на семинаре по теории функций в Одесском государственном университете, руководитель – проф. Э. А. Стороженко (Одесса, март 1995 г.); 5) на II конференции "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" (Киев, май 1995 г.); 6) на Международной конференции "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление", посвященной 90-летию со дня рождения Ф. Д. Гахова (Минск, февраль 1996 г.); 7) на семинаре по теории интерполяции линейных операторов в Воронежском государственном университете, руководитель – проф. Е. М. Семенов (Воронеж, сентябрь 1996 г.); 8) на семинаре по теории псевдодифференциальных операторов в Ростовском государственном университете, руководители – проф. И. Б. Симоненко и проф. Н. К. Карапетянц (Ростов-на-Дону, октябрь 1996 г.); 9) на семинаре по теории сингулярных интегральных уравнений в Университете Альгарве, руководитель – проф. В. Г. Кравченко (Фару, Португалия, июль 1997 г.); 10) на Международной конференции "Operator Theory and Applications", посвященной 90-летию со дня рождения М. Г. Крейна (Одесса, август 1997 г.); 11) на семинаре по теории операторов в Южно-Украинском педагогическом университете, руководитель – проф. Д. З. Аров (Одесса, ноябрь 1997 г.).

В заключение автор хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю Тарасенко Анне Андреевне за руководство работой. Работа выполнена при частичной поддержке Фонда "Відродження", программа ISSEP "Соросівські аспіранти", грант №PSU 071102.