# Análise Matemática I

**1º Semestre de 2004/05**

**Exercícios para as aulas práticas**

## I Elementos de Lógica e Teoria dos Conjuntos

1. (Exercício 1.2 de [2])Prove que, quaisquer que sejam as proposições $p$, $q$ e $r$, são verdadeiras as proposições:

   a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$,

   b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$,

   c) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,

   d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

2. (Exercício 1.3 de [2]) Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio a) o conjunto dos reais e b) o conjunto dos naturais não nulos:

   a) $\forall_x \; x^2 + 1 > 1$,

   b) $\forall_x \; x > 2 \Rightarrow x > 1$,

   c) $\forall_x \exists_y \; y = x^2$,

   d) $\exists_y \forall_x \; y = x^2$,

   e) $\forall_{x,y} \exists_z \; x = yz$,

   f) $\exists_{x,y} \; (x - y)^2 = x^2 - y^2$,

   g) $\forall_{x,y} \; (x - y)^2 = x^2 - y^2$.

3. (Exercício 1.4 de [2]) Verifique que, no conjunto dos reais, as condições $\exists_x \, y = x^2$ e $y \geq 0$ são (formalmente) equivalentes. Observe bem que o quantificador existencial em $x$ converteu a condição com duas variáveis, $y = x^2$, numa condição equivalente a $y \geq 0$, que tem apenas uma variável. A variável $y$ diz-se variável não quantificada ou livre. Na mesma ordem de ideias, verifique as equivalências formais:

   a) $\exists_y \; x = 10^y \; \Leftrightarrow \; x > 0$, em $\mathbb{R}$,

   b) $\forall_x \; y \leq x \; \Leftrightarrow \; y = 1$, em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

   c) $\forall_x \; y < x \; \Leftrightarrow \; y = y + 1$, em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

   d) $\exists_z \; x = y + z \; \Leftrightarrow \; x > y$, em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4. (Exercício 2.1.4 de [2]) Indique quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\emptyset \subset \emptyset$,

   b) $1 \in \{1\}$,

   c) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$,

   d) $1 \in \{2\}$,

   e) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$,

   f) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$,

g) $1 \in \mathbb{R}$,

h) $1 \in \{\mathbb{R}\}$.

5. (Exercício 2.1.5 de [2]) Quantos elementos têm os conjuntos seguintes:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\{\emptyset\}\}?$$

Indique algumas proposições verdadeiras que exprimam relações de inclusão e relações de pertença entre os conjuntos dados.

6. (Exercício 2.1.6 de [2]) Indique dois conjuntos $A$ e $B$ para os quais seja verdadeira a proposição $(A \in B) \wedge (A \subset B)$. Seja agora $A$ um conjunto arbitrário. Construa um conjunto $B$ para o qual a proposição anterior seja verdadeira.

7. (Exercício 2.1.7 de [2]) Sendo $A$ um conjunto arbitrário, chama-se conjunto das partes de $A$, e designa-se por $P(A)$, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de $A$. Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$ é $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

a) Quantos elementos têm os conjuntos $P(\emptyset)$ e $P(P(\emptyset))$?

b) Verifique que $x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \in P(A)$.

8. (Exercício 2.3.2 de [2]) Dê exemplos de aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que sejam:

a) bijectivas,

b) injectivas mas não sobrejectivas,

c) sobrejectivas mas não injectivas,

d) nem injectivas nem sobrejectivas.

9. (Exercício 2.3.3 de [2]) Classifique, numa das quatro classes consideradas nas alíneas do exercício anterior, as seguintes funções:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) &= x, \\ g &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, & g(x) &= x^{-1}, \\ F &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & F(x) &= x + 1, \\ G &: \mathbb{R} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}, & G(x) &= 1 + |C(x)|, \end{aligned}$$

onde $C(x)$ designa o maior número inteiro inferior ou igual a $x$.

10. (Exercício 2.3.4 de [2]) Supondo $A \subset B$, chama-se *aplicação canónica* à aplicação $I : A \to B$ definida por $I(x) = x \quad (\forall x \in A)$. Prove que $I$ é uma aplicação injectiva. Em que casos é bijectiva?

11. (Exercício 2.3.7 de [2]) Dadas as aplicações de $\mathbb{R}$ em si mesmo definida por

$$f(x) = x^3\,, \qquad g(x) = x + 1\,, \qquad h(x) = |x|\,,$$

e os conjuntos $C = \{-1, 0, 1\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}$, determine os conjuntos $f(C)$, $g(C)$, $h(C)$, $f(D)$, $g(D)$, $h(D)$, $f(\mathbb{N})$, $g(\mathbb{N})$, $h(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $h(\mathbb{R})$.

## II Axiomas dos Números Reais

1. (Exercícios 2.1.9 e 2.1.10 de [2], excepto h)) Interprete geometricamente os seguintes conjuntos:

   a) $\{x : |x| < 1\}$,
   b) $\{x : |x| < 0\}$,
   c) $\{x : |x - a| < \epsilon\}$, onde $\epsilon > 0$,
   d) $\{x : |x| > 0\}$,
   e) $\{x : (x - a)(x - b) < 0\}$, onde $a < b$,
   f) $\{x : x^3 > x\}$,
   g) $\{x : |x - 1| \geq |x|\}$,
   h) $\left\{x : \frac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$,
   i) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
   j) $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$,
   k) $\{(x, y) : \max(|x|, |y|) \leq 1\}$,

2. (Exercício 2.2.9 de [2]) Sejam $A, B, C, D, E$, os conjuntos dados em, respectivamente, a), b), c), d) e e) do exercícicio anterior. Determine $A \cap C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $A \cap E$, $B \cup C$.

3. (Exercícios 1.17, 1.18 e 1.19 de [4]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$,
   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$,
   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$,
   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$,
   e) $\frac{3^{n-1}}{n!} < \frac{19}{n^2}$, para qualquer número natural $n \geq 4$.

4. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,
   b) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo o número natural $n \geq 1$
   c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$, para todo o número natural $n \geq 1$,

5. (Exercício 1.20 de [4]) Demonstre a desigualdade de Bernoulli: Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,
$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

6. Considere a sucessão $(u_n)$ dos números de Fibonacci:
$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$
   Prove por indução que, para $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

7. (Exercício 1.2 de [4]) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2 \right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A \cap B = [-3, 4] \cup \{4\}$.

b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

8. (Exame de 19/1/2000) Considere os conjuntos $A$ e $B$ definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \log x} > 0 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Mostre que o conjunto $A$ é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos $A$ e $A \cup B$.

9. (Exame de 2000) Sejam $A$ e $B$ os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - 1| \leq x^2 - 1\}, \qquad B = [-2, 2].$$

a) Determine $A$ sob a forma de reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $\inf(A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

10. (Exame de 16/1/2004) Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{ x \,:\, \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1| \right\} \qquad B = \{x \,:\, \operatorname{sen} x = 0\} \qquad C = \mathbb{Q}$$

a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[ \cup [1, +\infty[$.

b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

11. (Exercício 1.10 de [4]) Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja $m$ um majorante de $A$, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

12. (Exercício 1.11 de [4]) Sendo $A$ um subconjunto majorado e não vazio de $\mathbb{R}$ e $\alpha = \sup A$, prove que, para qualquer $\epsilon > 0$, o conjunto $V_\epsilon(\alpha) \cap A$ é não vazio. Na hipótese de $\alpha$ não pertencer a $A$, o conjunto $V_\epsilon(\alpha) \cap A$ pode ser finito? Justifique.

13. (Exercício I.5 de [3]) Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que $A$ é não vazio e $B$ é majorado. Justifique que existem os supremos de $A$ e $B$ e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

14. (Exercício I.12 de [4]) Sendo $U$ e $V$ dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

15. (Exercício I.14 de [4]) Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, $A$ e $B$ são disjuntos.

    b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf V \wedge \sup B > \inf A$, $A$ e $B$ podem ser ou não disjuntos.

16. (Exercício I.3 de [3]) Prove que, se $x$ é um racional diferente de zero e $y$ um irracional, $x + y$, $x - y$, $xy$ e $y/x$ são irracionais; mostre também que, sendo $x$ e $y$ irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

## III Sucessões reais

1. (Exercício II.1 de [3]) Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas do modo seguinte:

    a) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

    b) $u_n = (-1)^n n^2$.

    c) $u_n = n^{(-1)^n}$.

    d) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

    e) $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

    f) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = -2u_n$.

2. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que:

    a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

    b) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é divergente.

3. (Exercício II.2 de [3]) A mesma questão que a anterior para:

    a) $\frac{2n-1}{n+1} \to 2$.

    b) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$.

4. Determine, se existirem, os limites em $\mathbb{R}$ das sucessões que têm por termo de ordem $n$:

    a) $\frac{2n+3}{3n-1}$.

    b) $\frac{n^2-1}{n^4+3}$.

    c) $\frac{(n+1000)^5}{n^6+1}$

    d) $\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$.

    e) $\frac{n^2+2n-1}{n^3+1}$.

    f) $\frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)(n+2)}$.

    g) $\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}$, onde $p,q \in \mathbb{N}_1$.

    h) $\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$.

i) $\frac{a^{n+1}+b^n}{a^n+b^{n+1}}$, onde $a,b \in \mathbb{R}^+$.

j) $\frac{a^n b^n}{a^n+b^n}$, onde $a,b \in \mathbb{R}^+$.

5. (Exame de 1/3/2001) Considere os conjuntos definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x-2} \geq x \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(2x^2 + x) \geq 0 \right\}$$

a) Identifique o conjunto $A$, e mostre que $B = ]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$ :

$$\min A, \quad \sup B \cap \mathbb{Q}, \quad \inf A \cap B, \quad \sup B \cap \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}, \quad \max A \cap \mathbb{Q}^-.$$

c) Mostre que, se $(x_n)$ é uma sucessão crescente em $A \cap B \cap \mathbb{R}^-$, então $(x_n)$ é convergente.

d) Mostre que, se $(x_n)$ é uma sucessão em $B \cap \mathbb{R}^+$, então a sucessão $(y_n)$ dada por $y_n = (-1)^n x_n$ é divergente.

e) Dê um exemplo de uma sucessão $(x_n)$ de irracionais em $A$ que convirga para um elemento do complementar de $A$.

6. (Exame 19/1/2000, excepto d)) Sejam $A$ e $B$ os conjuntos considerados na questão II.8. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contraexemplo:

a) Toda a sucessão de termos em $A$ que seja limitada é convergente.

b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

d) O conjunto dos termos de uma sucessão em $B$ decrescente é necessariamente finito

7. (Exercício II.1g) de [3]) Seja $(u_n)$ a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+\sqrt{2+u_n}}$ e mostre que $(u_n)$ é crescente.

c) Justifique que $(u_n)$ é convergente.

d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de $(u_n)$.

8. (Exercício 8.13 de [1]) Seja $(a_n)$ a sucessão definida por recorrência por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$.

a) Verifique que $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(3-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3})}{3+a_n}$. Prove por indução que $a_n > \sqrt{3}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Prove que $(a_n)$ é decrescente.

c) Justifique que $(a_n)$ é convergente.

d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de $(a_n)$.

9. A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^{n+1}$ pode ser dada por $u_1 = 1$ e $u_{n+1} = -u_n$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$. Considere o seguinte argumento (falso):

   *De $u_{n+1} = -u_n$ obtem-se $u_{n+1} + u_n = 0$ e. portanto $\lim(u_{n+1} + u_n) = 0$. Mas as sucessões de termo geral $u_n$ e $u_{n+1}$ têm o mesmo limite. Sendo $l = \lim u_n = \lim u_{n+1}$, obtemos $l+l = 0$, donde $l = 0$, ou seja, $\lim u_n = 0$.*

   Esta conclusão contradiz o facto conhecido de que $u_n = (-1)^{n+1}$ é divergente. Onde está o erro do argumento anterior?

10. (Exercício II.3 de [3]) Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ com supremo $s$. Prove que existe uma sucessão $(x_n)$, de termos em $A$, convergente para $s$. Prove ainda que, se $A$ não tem máximo, a sucessão $(x_n)$ pode ser escolhida por forma que seja estritamente crescente.

11. (Exercício II.4 de [3]) Sendo $(x_n)$ uma sucessão monótona e $(y_n)$ uma sucessão limitada verificando $|x_n - y_n| < 1/n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, prove em primeiro lugar que $(x_n)$ é limitada e depois que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

12. (Exercício II.6 de [3]) Seja $a_n$ o termo de ordem $n$ de uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$,

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1.$$

   a) Justifique que a sucessão é convergente e indique um intervalo (de comprimento tão pequeno quanto possível), que contenha o limite de qualquer sucessão que satisfaça às condições impostas a $a_n$.

   b) Indique o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão; este conjunto terá máximo? e mínimo? justifique as respostas.

## IV Sucessões reais (continuação)

1. (Exercício 1.52 de [4]) Seja

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \right\}.$$

   a) Diga se o conjunto $A$ é majorado ou minorado e indique (caso existam) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A$.

   b) Justifique que o conjunto dos sublimites de uma qualquer sucessão de termos em $\mathbb{R}^- \cap A$ é não vazio.

   c) Mostre, por meio de exemplos, que o conjunto dos sublimites de uma sucessão de termos em $\mathbb{R}^+ \cap A$ pode ou não ser vazio.

2. (Exercício II.5 de [3]) Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem $n$:

   a) $\frac{n^3+1}{n^2+2n-1}$.

   b) $\frac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$.

c) $\frac{n!}{n^{1000}}$,

d) $\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

e) $\frac{2^n}{n^2}$.

f) $\sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}}$.

g) $\sqrt[n]{2^n+1}$.

h) $\sqrt[n]{n!}$.

i) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$.

j) $\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{n!}$.

k) $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

3. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

a) $1-\sqrt{n} \to -\infty$.

b) $\frac{n^2+1}{n} \to +\infty$.

4. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

a) $\lim n^{\frac{1}{n}}$.

b) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

c) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{n}$.

d) $\lim \left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

e) $\lim \frac{2^{n^2}}{15^n}$.

5. identifique os conjuntos dos sublimites em $\mathbb{R}$ e em $\overline{\mathbb{R}}$ da sucessão:

(a) de termo geral $u_n = \dfrac{2^n}{n^n}$,

(b) de termo geral $u_n = \dfrac{n!}{n^{100000}}$,

(c) de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n} + 2\cos n\pi$,

(d) $(u_n)$ tal que $u_n = 0$ se $n$ é par, $u_n = n$ se $n$ é ímpar.

(e) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

(f) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Será possível o conjunto dos sublimites em $\mathbb{R}$ de uma sucessão $u$ ser um conjunto singular e $u$ ser divergente? Justifique. E se os sublimites e a convergência da sucessão forem considerados em $\overline{\mathbb{R}}$? (Sugestão: veja um dos casos acima).

6. (Página 119 de [3]) Seja $(u_n)$ limitada e $\epsilon > 0$. Prove que é finito o conjunto das ordens $n$ para as quais $u_n > \overline{\lim}\, u_n + \epsilon$.

## V Séries numéricas.

1. (Exercício II.12 de [3], excepto c) e d)) Calcule a soma das séries:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(5n+1)}$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
   d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$.
   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,
   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$.

2. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, se possível, a sua soma.

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{k!}$,
   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$,
   c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$,
   d) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$,
   e) $\sum_{k=0}^{\infty} e^k \pi^{-2k}$,
   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,
   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\right)$.

3. (Exercício II.14 de [3]) Determine a natureza das séries:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$,
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$,
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$,
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$,
   e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$,
   f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
   g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$,
   h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$,
   i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$,
   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$,
   k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n+1)}{3.6.9...(3n+3)}$,
   l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$,
   m) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3$.

4. Prove que o número representado pela dízima infinita $0.9999999\ldots$ é exactamente o real 1 (de um modo geral se $a$ fôr um natural então o número representado pela dízima infinita $a.9999999\ldots$ e $a+1$ são o mesmo número).

   Sugestão: veja que $0.9999999\ldots = 9(10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots)$.

5. (Exercício II.13 de [3]) Prove que qualquer número representado por uma dízima periódica é racional.

   Sugestão: veja, por exemplo, que $0.2151515\ldots = \frac{2}{10} + \frac{15}{1000}\left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots\right)$.

## VI Séries numéricas (continuação). Séries de potências.

1. (Exercício II.17 de [3]) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$,

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$,

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

2. (Exercício 2.17 de [4]) Seja $(a_n)$ uma sucessão de termos positivos e $(b_n)$ uma sucessão limitada.

   a) Mostre que a convergência da série $\sum a_n$ implica a convergência da série $\sum a_n b_n$.

   b) Use o resultado anterior para provar que se a série $\sum a_n$ converge então tambem converge $\sum a_n^2$.

   c) Mostre, por meio de um contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

3. (Exercícios 2.34, 2.35, 2.38 de [4]) Determine para que valores reais de $x$ são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as séries

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ ,

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$ ,

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{x-2}{x}\right)^n$ ,

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} (x^2 - x)$ .

4. (Exercício II.18 de [3]) Determine os intervalos de convergência das séries seguintes, indicando em que pontos é cada série simplesmente ou absolutamente convergente:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{2.4.6\ldots(2n)} x^{n+1}$,

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$,

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$, onde $a \neq 0$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$.

g) $\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n x^n$.

5. Prove que, se o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é maior do que 1, então $\lim a_n = 0$. Mostre que, se o raio de convergência da série for igual a 1, a sucessão $(a_n)$ pode tender para qualquer limite (finito ou infinito) ou não ter limite. Prove ainda que, na hipótese de o raio de convergência ser menor do que 1, a sucessão $(a_n)$ não é limitada.

## VII Funções exponencial, trigonométricas, hiperbólicas e respectivas inversas

1. a) Seja $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Mostre, partindo das propriedades da exponencial e da definição de logaritmo, que $a^b = e^{b \log a}$ (donde, em particular, se deduz a identidade $\log(a^b) = b \log a$).

   b) Seja $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, e defina a função $L_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\forall_{y>0}, \quad L_a(y) = \frac{\log y}{\log a}.$$

   Mostre que $y = a^x$ sse $x = L_a(y)$ (mostrando, deste modo, que $L_a(y)$ é o que habitualmente se designa por "logaritmo de $y$ na base $a$"e se representa com frequência por $\log_a y$).

2. Usando as expressões

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

   exprima $\operatorname{sen}(2a), \cos(2a)$, em termos de $\operatorname{sen} a$ e $\cos a$ e deduza

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos a}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{2}.$$

3. Prove, usando as identidades anteriores, que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Mostre que

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x, \qquad \cos 3x = \cos x - 4 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

5. Use as identidades anteriores para provar que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

6. Deduza

   a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para $x$ tal que $\cos x \neq 0$.

   b) $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, para $x, y$ tais que $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq -1$.

7. Identifique $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

8. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arccos a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

9. Deduza as seguintes identidades:

   a) $\cos(\arccos x) = x$
   b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$
   c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$
   d) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
   e) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
   f) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
   g) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$
   h) $\cos(2\operatorname{arcsen} x) = 1 - 2x^2$
   i) $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

10. Deduza as seguintes igualdades para as funções hiperbólicas

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

   comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas:

   a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
   b) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
   c) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
   d) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$
   e) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
   f) $\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$
   g) $\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$

11. Prove por indução matemática que, para cada $x \in \mathbb{R}$, a seguinte igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}_1$:

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$$

12. As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por $\operatorname{arg\,sh}$ e $\operatorname{arg\,ch}$, isto é, $x = \operatorname{sh} y$ sse $y = \operatorname{arg\,sh} x$, e $x = \operatorname{ch} y$ sse $y = \operatorname{arg\,ch} x$. Deduza

$$\operatorname{arg\,sh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{arg\,ch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

## VIII Continuidade

1. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são contínuas em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet, é apenas contínua em $x = 0$.

3. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $a$ e $f(a) > 0$, então, existe uma vizinhança de $a$, $V_\varepsilon(a)$ com $\varepsilon > 0$, tal que
$$\forall_x\, ,\ x \in V_\varepsilon(a) \Longrightarrow f(x) > 0.$$

4. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite (Sugestão: poderá recorrer, se necessário, a desenvolvimentos em série de potências dados.)

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ ,
   b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ ,
   c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left[e^{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{x^5+1} + (x^3+3x^2+1)^{10}\right]$ ,
   d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$ ,
   e) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\frac{1}{x})\right]$ ,
   f) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ ,
   g) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ ,
   h) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ ,

5. (Exercício 3.15 de [4]) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$? Justifique.

6. a) Mostre que se uma função é contínua em $\mathbb{R}$ e nula em todos o racionais, então a função é identicamente nula.

   b) Se $f$ e $g$ estão definidas em $\mathbb{R}$ e coincidem nos racionais, têm que coincidir em $\mathbb{R}$? E se, por hipótese, ambas são contínuas?

7. Use a definição de limite de função em $\tilde{\mathbb{R}}$ para mostrar que

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
   b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
   c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

8. (Exercício 3.26. de [4]) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}\, d(x),$$
   onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet.

   a) Indique o contradomínio de $f$. A função é majorada? E minorada?

b) Estude $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Em que pontos é $f$ contínua?

9. (Exercício 3.29 de [4])

   a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pelas fórmulas:

   $$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \qquad \psi(x) = x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,.$$

   b) Indique, justificando, se cada uma das funções $\varphi$ e $\psi$ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

   c) Mostre que $\phi$ e $\psi$ são funções limitadas.

10. (Exercício 3.27 de [4]) Seja $f$, a função real definida por,

    $$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}\,, & \text{se } x < 0\,, \\ \log\frac{1}{1+x^2}\,, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

    a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

    b) Justifique que $f$ é contínua em todo o seu domínio.

    c) Mostre que $f$ é prolongável por continuidade ao ponto 0.

    d) Sendo $g$ a função que resulta de $f$ por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que $g$ tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon,\varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) \,:\, x \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$.

11. (Exercício 3.27 de [4]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

    $$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \le -1\,, \\ \mathrm{arcsen}\, x\,, & \text{se } -1 < x < 1\,, \\ K\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, & \text{se } x \ge 1\,. \end{cases}$$

    a) Determine $K$.

    b) Estude $f$ do ponto de vista da continuidade.

    c) Indique o contradomínio de $f$ e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

    d) Quais são os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}$, caso existam?

12. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

    $$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

    a) Mostre que $\varphi$ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

    b) Calcule os limites laterais de $\varphi$ no ponto 0, e indique, justificando, se $\varphi$ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto (por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto $a$ do seu domínio $D$, sse a sua restrição a $]-\infty,a]\cap D$ ($[a,+\infty[\cap D$) é contínua em $a$).

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$.

d) Indique, justificando, o contradomínio de $\varphi$.

13. Considere as funções $f$ e $g$ definidas em $]0,+\infty[$ pelas expressões

$$f(x)=\log\log(1+x) \qquad\qquad g(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2}$$

a) Estude $f$ e $g$ quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de $f$.

14. Seja $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua (com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$). Supondo que existe uma sucessão $(x_n)$ de termos em $[a,b]$ tal que $\lim\phi(x_n)=0$, prove que $\phi$ tem pelo menos um zero em $[a,b]$.

15. Sendo $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

a) Não existe nenhuma sucessão $(x_n)$ de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n)=n$ para todo $n$.

b) Se existir uma sucessão $(x_n)$ de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n)=\frac{1}{n}$ para todo $n$, então existe $c\in[0,1]$ tal que $g(c)=0$.

# IX Diferenciabilidade

1. Calcule as derivadas das funções:

   a) $x \mapsto \operatorname{tg} x - x$,

   b) $x \mapsto \frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,

   c) $x \mapsto e^{\operatorname{arctg} x}$,

   d) $x \mapsto e^{\log^2 x}$,

   e) $x \mapsto x \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$,

   f) $x \mapsto x^2(1+\log x)$,

   g) $x \mapsto (\log x)^x$,

   h) $x \mapsto x^{x^{x-1}}$.

2. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as derivadas de

   a) $x \mapsto x|x|$,

   b) $x \mapsto e^{-|x|}$,

   c) $x \mapsto \log|x|$,

   d) $x \mapsto e^{x-|x|}$,

   e) $x \mapsto (-1)^{\mathcal{C}(x)}x$.

3. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} a+bx & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   a) Mostre que $f$ é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1.

   b) Sabendo que $f$ é diferenciável no ponto 0, determine os valores de $a$ e $b$.

   c) Defina $f'$ e diga se a função $f$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

6. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de $g$, $g'$ e $g''$ em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

7. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o $x$, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função $g'$.

8. Seja $f$ uma função definida numa vizinhança de zero $V_\varepsilon(0)$, diferenciável em $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

a) Supondo que $f$ é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de $f$ e indique se é máximo ou mínimo.

b) Mostre (por meio de um exemplo) que sem a hipótese da continuidade de $f$ no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de $f$.

9. Supondo que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ em $[a,b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \qquad \text{para quaisquer } x, y \in [a,b].$$

**Nota** Diz-se que $f$ é de classe $C^1$ em $[a,b]$ sse $f$ é contínua em $[a,b]$, é de classe $C^1$ em $]a,b[$ e $f'$ é prolongável por continuidade a $[a,b]$. Isto equivale a dizer que a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} f'_d(a) & \text{se } x = a \\ f'(x) & \text{se } x \in \,]a,b[ \\ f'_e(b) & \text{se } x = b \end{cases}$$

está bem definida e é contínua.

10. Seja $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função $f$ tem necessariamente máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

b) A função $f$ é necessariamente limitada.

c) A função $f'$ tem necessariamente infinitos zeros.

11. Seja $f$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

12. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então $f''$ tem pelo menos um zero.

13. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.

14. Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

15. Prove que se $f$ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, com segunda derivada limitada, e $f(0) = f'(0) = 0$, então existe $c > 0$ tal que para todo o $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq c|x|^2$.

16. Prove que se $f$ é de classe $C^1$ em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então $f'$ tem pelo menos um zero.

17. (Exercício IV.12 de [3]) Calcule os limites:

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
    b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,
    c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$,
    d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
    e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
    f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$,
    g) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

18. (Exercício IV.10 de [3]) Determine o cilindro de area total mínima, de entre todos os cilindros circulares rectos com um dado volume.

## Referências


[1] **T.M. Apostol**, *Mathematical Analysis,* Second edition. Addison Wesley, 1974.

[2] **J. Campos Ferreira**, *Lições de Análise Real*, IST, 2001.

[3] **J. Campos Ferreira**, *Introdução à Análise Matemática,* Fundação Gulbenkian, 6ª ed., 1995.

[4] *Exercícios de Análise matemática I e II,* IST press, 2003.