Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre 03/04

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
8 de Novembro de 2003 (9:00)

Teste 101

Nome:
Número:
Curso:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de seis perguntas. As quatro primeiras são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -2/3. As duas últimas perguntas não são de escolha múltipla, estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na última tabela, e somam no total 12 valores.

Para as 4 primeiras perguntas, marque as suas escolhas na tabela abaixo.

	1	2	3	4
A)	X			
B)			X	X
C)		X		
D)				

Os quadros abaixo destinam-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Número de Perguntas certas	
Número de Perguntas erradas	

Nota da Escolha Múltipla		
Perg 5.a)	3 Val	
Perg 5.b)	3 Val	
Perg 5.c)	3 Val	
Perg 6	3 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (2 valores)
Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. A inversa do produto AB^T é dada por:

A) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A resposta correcta é A)

Problema 2 (2 valores)
Sejam A e B matrizes 4×4 tais que $\det A = -1$ e $\det B = 3$. Considere as seguintes igualdades:

I. $\det((2AB)^T) = -48$

II. $\det((AB)^{-1}) = -3$

III. $\det((2AB)^{-1}) = -\frac{16}{3}$

IV. $\det((AB)^T) = -\frac{1}{15}$

Indique a lista completa de igualdades correctas:
A) II e IV **B)** I e III **C)** I **D)** Nenhuma
A resposta correcta é C)

Problema 3 (2 valores)
Seja uma base de $\mathbb{R}^2$ o conjunto $B = \{(-1,-1),(-1,3)\}$. Qual a representação do vector $\mathbf{v} = (4,0)$ na base B?

A) $(\mathbf{v})_B = (-3, 0)$

B) $(\mathbf{v})_B = (-3, -1)$

C) $(\mathbf{v})_B = (-1, -1)$

D) $(\mathbf{v})_B = (-3, -3)$

A resposta correcta é B)

Problema 4 (2 valores)
Seja A uma matriz $n\times\ n$. Considere as seguintes afirmações :

I. A é invertível sse $\det A \neq 0$.

II. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única para cada vector coluna $\mathbf{b}$ sse as linhas de A são linearmente independentes.

III. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem como única a solução trivial sse A tem característica estritamente menor que n.

IV. A nulidade de A é positiva sse $\det A = 0$.

Indique a lista completa de afirmações correctas.
A) II e IV **B)** I , II e IV **C)** II **D)** III e IV
A resposta correcta é B)

Problema 5 (9 valores)
Sejam os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço $W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

a) (3 valores) Discuta em função do parâmetro α a dimensão do subespaço W gerado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Indique em cada caso uma base para o subespaço linear W.

b) (3 valores) Seja $\alpha = 0$, para que valor(es) de β o vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\beta^2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertence ao subespaço W gerado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?

c) (3 valores) Para todo o α, dê um exemplo de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ que não esteja em W. Construa uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) *Para* $\alpha = 0$, *temos* $\dim W = 2$ *e uma base de* W *poderá ser dada por* $\{(-1,0,0,0),(0,1,-2,0)\}$; *para* $\alpha \neq 0$, *temos* $\dim W = 3$ *e uma base de* W *poderá ser dada por* $\{(-1,0,0,0),(0,1,-2,0),(4,1,0,0)\}$.
(b) $\mathbf{x} \in W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *sse* $\beta = \pm\sqrt{2}$.
(c) $\mathbf{x} = (0,0,0,1) \notin W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *para todo o* α. *Base para* $\mathbb{R}^4$ *que inclua os vectores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *tem de se exigir* $\alpha \neq 0$ *e temos, p. ex.,* $\{(-1,0,0,0),(0,1,-2,0),(4,1,0,0),(0,0,0,1)\}$

Problema 6 (3 valores)
Mostre a seguinte igualdade, usando as propriedades do determinante (sem o calcular explicitamente).

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ -a_1 + a_2 + a_3 & -b_1 + b_2 + b_3 & -c_1 + c_2 + c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Indique quais as propriedades que está a usar!

Solução: $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ -a_1 + a_2 + a_3 & -b_1 + b_2 + b_3 & -c_1 + c_2 + c_3 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 + a_3 & b_2 + b_3 & c_2 + c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -(-1)(-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$