Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} **semestre 03/04**

1^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
8 de Novembro de 2003 (9:00)

Teste 102

Nome:
Número:
Curso:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de seis perguntas. As quatro primeiras são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -2/3. As duas últimas perguntas não são de escolha múltipla, estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na última tabela, e somam no total 12 valores.

Para as 4 primeiras perguntas, marque as suas escolhas na tabela abaixo.

	1	2	3	4
A)		X		X
B)				
C)	X			
D)			X	

Os quadros abaixo destinam-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Número de Perguntas certas	
Número de Perguntas erradas	

Nota da Escolha Múltipla		
Perg 5.a)	3 Val	
Perg 5.b)	3 Val	
Perg 5.c)	3 Val	
Perg 6	3 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (2 valores)
Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. A inversa do produto AB^T é dada por:

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

A resposta correcta é C)

Problema 2 (2 valores)
Sejam A e B matrizes 4×4 tais que $\det A = 2$ e $\det B = -1$. Considere as seguintes igualdades :

I. $\det((2AB)^T) = -4$

II. $\det(B^{-1}AB) = 2$

III. $\det((AB)^{-1}) = -\frac{1}{2}$

IV. $\det(BB^T) = -1$

Indique a lista completa de igualdades correctas:
A) II e III **B)** I e III **C)** IV **D)** II, III e IV
A resposta correcta é A)

Problema 3 (2 valores)
Seja uma base de $\mathbb{R}^2$ o conjunto $B = \{(-2,1),(-1,-2)\}$. Qual a representação do vector $\mathbf{v} = (-10,0)$ na base B?

A) $(\mathbf{v})_B = (4,1)$

B) $(\mathbf{v})_B = (3,2)$

C) $(\mathbf{v})_B = (4,0)$

D) $(\mathbf{v})_B = (4,2)$

A resposta correcta é D)

Problema 4 (2 valores)
Seja A uma matriz $n\times\ n$. Considere as seguintes afirmações :

I. A característica de A é igual a n sse $\det A \neq 0$.

II. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única para cada vector coluna $\mathbf{b}$ sse A resulta do produto de matrizes elementares.

III. As colunas de A são linearmente dependentes sse A não é invertível.

IV. A nulidade de A é igual a zero sse o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

Indique a lista completa de afirmações correctas.
A) I, II e III **B)** I , II e IV **C)** II **D)** III e IV
A resposta correcta é A)

Problema 5 (9 valores)
Sejam os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

a) (3 valores) Discuta em função do parâmetro γ a dimensão do subespaço U gerado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Indique em cada caso uma base para o subespaço linear U.

b) (3 valores) Seja $\gamma = 0$, para que valor(es) de δ o vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1+\delta^2 \end{bmatrix}$ pertence ao subespaço U gerado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$?

c) (3 valores) Para todo o γ, dê um exemplo de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ que não esteja em U. Construa uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) *Para* $\gamma = 0$, *temos* $\dim U = 2$ *e uma base de* U *poderá ser dada por* $\{(1,0,0,0),(0,0,3,-1)\}$; *para* $\gamma \neq 0$, *temos* $\dim U = 3$ *e uma base de* U *poderá ser dada por* $\{(1,0,0,0),(0,0,3,-1),(1,0,0,1)\}$.
(b) $\mathbf{x} \in U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *sse* $\delta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(c) $\mathbf{x} = (0,1,0,0) \notin U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *para todo o* γ. *Base para* $\mathbb{R}^4$ *que inclua os vectores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *tem de se exigir* $\gamma \neq 0$ *e temos, p. ex.,* $\{(1,0,0,0),(0,0,3,-1),(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$

Problema 6 (3 valores)
Mostre a seguinte igualdade, usando as propriedades do determinante (sem o calcular explicitamente).

$$\begin{vmatrix} 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 & c_1+c_2+c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Indique quais as propriedades que está a usar!

Solução: $\begin{vmatrix} 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 & c_1+c_2+c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$
$\begin{vmatrix} 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ a_2+a_3 & b_2+b_3 & c_2+c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$