

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
8 de Novembro de 2003 (9:00)

Teste 104

Nome:
Número:
Curso:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de seis perguntas. As quatro primeiras são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale $-2/3$. As duas últimas perguntas não são de escolha múltipla, estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na última tabela, e somam no total 12 valores.

Para as 4 primeiras perguntas, marque as suas escolhas na tabela abaixo.

	1	2	3	4
A)				
B)	X		X	
C)				X
D)		X		

Os quadros abaixo destinam-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Número de Perguntas certas	
Número de Perguntas erradas	

Nota da Escolha Múltipla	
Perg 5.a)	3 Val
Perg 5.b)	3 Val
Perg 5.c)	3 Val
Perg 6	3 Val

NOTA FINAL:

Problema 1 (2 valores)

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. A inversa do produto AB^T é dada por:

A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

A resposta correcta é B)

Problema 2 (2 valores)Sejam A e B matrizes 4×4 tais que $\det A = 2$ e $\det B = -1$. Considere as seguintes igualdades :

I. $\det((2AB)^T) = -32$

II. $\det(A^{-1}BA) = 2$

III. $\det((2AB)^{-1}) = -\frac{1}{2}$

IV. $\det(AA^T) = 1$

Indique a lista completa de igualdades correctas:

A) Nenhuma B) I e III C) IV D) I

A resposta correcta é D)

Problema 3 (2 valores)

Seja uma base de \mathbb{R}^2 o conjunto $B = \{(-2, 1), (-1, -2)\}$. Qual a representação do vector $\mathbf{v} = (-10, 0)$ na base B ?

A) $(\mathbf{v})_B = (2, 1)$

B) $(\mathbf{v})_B = (4, 2)$

C) $(\mathbf{v})_B = (4, 4)$

D) $(\mathbf{v})_B = (4, 0)$

A resposta correcta é B)

Problema 4 (2 valores)

Seja A uma matriz $n \times n$. Considere as seguintes afirmações :

- I. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem como única a solução trivial sse A tem característica igual a n .
- II. A nulidade de A é positiva sse $\det A \neq 0$.
- III. A é invertível sse $\det A = 0$.
- IV. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tem solução única para cada vector coluna \mathbf{b} sse as linhas de A são linearmente independentes.

Indique a lista completa de afirmações correctas.

- A)** Nenhuma **B)** I , II e IV **C)** I **D)** III e IV

A resposta correcta é C)

Problema 5 (9 valores)

Sejam os seguintes vectores de \mathbb{R}^4 :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

- a) (3 valores) Discuta em função do parâmetro δ a dimensão do subespaço U gerado por \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . Indique em cada caso uma base para o subespaço linear U .

- b) (3 valores) Seja $\delta = 0$, para que valor(es) de γ o vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \gamma^2 - 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ pertence ao subespaço U gerado por \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} ?

- c) (3 valores) Para todo o δ , dê um exemplo de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ que não esteja em U . Construa uma base para \mathbb{R}^4 que inclua os vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) Para $\delta = 0$, temos $\dim U = 2$ e uma base de U poderá ser dada por $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 2)\}$; para $\delta \neq 0$, temos $\dim U = 3$ e uma base de U poderá ser dada por $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 2), (-1, 0, 1, 0)\}$.

(b) $\mathbf{x} \in U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ sse $\gamma = \pm\sqrt{2}$.

(c) $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 0) \notin U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ para todo o δ . Base para \mathbb{R}^4 que inclua os vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} tem de se exigir $\delta \neq 0$ e temos, p. ex., $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 2), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$

Problema 6 (3 valores)

Mostre a seguinte igualdade, usando as propriedades do determinante (sem o calcular explicitamente).

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & c_1 + c_2 + c_3 \\ -2a_3 & -2b_3 & -2c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Indique quais as propriedades que está a usar!

$$\begin{aligned} \text{Solução: } & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & c_1 + c_2 + c_3 \\ -2a_3 & -2b_3 & -2c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ -2a_3 & -2b_3 & -2c_3 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 + a_3 & b_2 + b_3 & c_2 + c_3 \\ -2a_3 & -2b_3 & -2c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$