

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
29 de Novembro de 2003 (9:00)

Teste 203

Nome:
Número:
Curso:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de seis perguntas. As quatro primeiras são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale $-2/3$. As duas últimas perguntas não são de escolha múltipla, estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na última tabela, e somam no total 12 valores.

Para as 4 primeiras perguntas, marque as suas escolhas na tabela abaixo.

	1	2	3	4
A)			X	
B)	X			
C)				X
D)		X		

Os quadros abaixo destinam-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Número de Perguntas certas	
Número de Perguntas erradas	

Nota da Escolha Múltipla	
Perg 5.a)	2 Val
Perg 5.b)	4 Val
Perg 5.c)	2 Val
Perg 6.a)	2 Val
Perg 6.b)	2 Val

NOTA FINAL:

Problema 1 (2 valores)

Considere a transformação que tomando um vector de \mathbb{R}^2 o reflecte relativamente ao eixo dos yy , seguidamente o roda em $\frac{3\pi}{4}$ no sentido contrário dos ponteiros do relógio e finalmente o projecta no eixo dos xx . Diga qual das seguintes matrizes representa esta transformação linear relativamente à base canónica de \mathbb{R}^2 :

A)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

B)
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C)
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D)
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

A resposta correcta é B)

Problema 2 (2 valores)

Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, em que o espaço das linhas de A admite uma base constituída pelos vectores $(3, -3, 0, 0)$ e $(-6, -4, -2, 4)$. Considere as seguintes afirmações :

- I. O conjunto $\{(-1, -5, -5)\}$ constitui uma base da imagem de T .
- II. O conjunto $\{(0, 5, 5, -4), (-4, 0, -1, 1), (0, 0, 0, 0)\}$ constitui uma base do espaço nulo de T .
- III. O espaço nulo de T tem dimensão 2.
- IV. A dimensão da imagem de T é igual a 3.

Indique a lista completa de afirmações correctas.

- A) II e III B) I e IV C) Nenhuma D) III
A resposta correcta é D)

Problema 3 (2 valores)

Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

relativamente às bases canónicas correspondentes. Determine quais dos seguintes vectores pertencem ao núcleo da transformação.

- I. $(0, 0, 0, 0)$
- II. $(0, 0, 0)$
- III. $(11, 8, 10, 0)$
- IV. $(4, 3, -3, -1)$

Indique a lista completa e correcta de vectores que pertencem ao núcleo.

- A)** I e III **B)** I e IV **C)** II e III **D)** Todos
A resposta correcta é A)

Problema 4 (2 valores)

Considere a transformação que tomando um vector de \mathbb{R}^2 o reflecte relativamente ao eixo dos yy , seguidamente lhe imprime um deslizamento dado pela multiplicação por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e finalmente o contrai para um terço. Quais os valores próprios desta transformação?

- A) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$
- B) $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ e $\lambda_2 = 0$
- C) $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{3}$
- D) $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{4}{3}$

A resposta correcta é C)

Problema 5 (8 valores)

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, x_1 - x_2, -x_3)$.

- a) **(2 valores)** Determine a matriz $C = M(T, B_c^{(3)}, B_c^{(3)})$ que representa T relativamente à base canónica de \mathbb{R}^3 .
- b) **(4 valores)** Considere em \mathbb{R}^3 a base $B_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -2)\}$. Determine a matriz $A = M(T, B_1, B_1)$ que representa T relativamente à base B_1 . Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando A com a matriz C da alínea anterior através das matrizes mudança de base, que também devem ser apresentadas explicitamente.
- c) **(2 valores)** Determine os valores próprios da transformação linear T e escreva a matriz que representa T na base dos vectores próprios da transformação.

Apresente todos os cálculos que efectuar!

Solução: para a) e b) indicamos apenas o diagrama comutativo que estabelece a relação:

$$A = P^{-1}CP$$

$$\begin{array}{ccc}
 & C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \\
 \mathbb{R}_{B_c^{(3)}}^3 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}_{B_c^{(3)}}^3 \\
 P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \uparrow & & \downarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 & A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} & \\
 \mathbb{R}_{B_1}^3 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}_{B_1}^3
 \end{array}$$

c) *A matriz que representa T na base dos vectores próprios é a matriz diagonal com os valores próprios na diagonal principal:*

$$D = M(T, B_{ve.p.}, B_{ve.p.}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Problema 6 (4 valores)

Considere a aplicação linear

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\longmapsto T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

a) **(2 valores)** Utilize a informação dada na seguinte tabela:

A	4×4	4×4	4×4	5×8	8×5
car A	2	3	4	5	5
nul T	2	1	0	3	0
injectividade	não	não	sim	não	sim
sobrejectividade	não	não	sim	sim	não

para determinar a dimensão do núcleo de T , preenchendo os respectivos campos vazios da tabela. Preencha ainda os campos sobre a injectividade e a sobrejectividade, escrevendo sim ou não.

b) **(2 valores)** Apresente um exemplo de transformação invertível com $n = m = 3$ e um exemplo de transformação não-invertível com $n = m = 3$. **Justifique!**

Solução : b) Exemplo de transformação invertível:

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{aligned}$$

a transformação identidade em \mathbb{R}^3 é invertível porque $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ e a sua inversa é também a transformação identidade em \mathbb{R}^3 .

Exemplo de transformação não-invertível:

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longmapsto T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a transformação que projecta vectores de \mathbb{R}^3 no plano- xy não é invertível porque $\mathcal{N}(T) = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$, i.e. tem núcleo não-trivial e, consequentemente, não tem inversa.