Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} **semestre 03/04**

2^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
29 de Novembro de 2003 (9:00)

Teste 204

Nome:
Número:
Curso:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de seis perguntas. As quatro primeiras são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -2/3. As duas últimas perguntas não são de escolha múltipla, estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na última tabela, e somam no total 12 valores.

Para as 4 primeiras perguntas, marque as suas escolhas na tabela abaixo.

	1	2	3	4
A)	X	X		X
B)				
C)				
D)			X	

Os quadros abaixo destinam-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Número de Perguntas certas	
Número de Perguntas erradas	

Nota da Escolha Múltipla		
Perg 5.a)	2 Val	
Perg 5.b)	4 Val	
Perg 5.c)	2 Val	
Perg 6.a)	2 Val	
Perg 6.b)	2 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (2 valores)
Considere a transformação que tomando um vector de $\mathbb{R}^2$ o projecta no eixo dos xx, seguidamente o roda em $\frac{\pi}{4}$ no sentido dos ponteiros do relógio e finalmente o reflecte relativamente à recta $y=-x$. Diga qual das seguintes matrizes representa esta transformação linear relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$:

A) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$

A resposta correcta é A)

Problema 2 (2 valores)
Seja $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, em que o espaço das linhas de A admite uma base constituida pelos vectores $(-1,-5,-3,1)$ e $(0,0,-2,0)$. Considere as seguintes afirmações :

I. A dimensão da imagem de T é igual a 1.

II. O espaço nulo de T tem dimensão 3.

III. O conjunto $\{(1,0,0,1), (-5,1,0,0)\}$ constitui uma base do espaço nulo de T .

IV. O conjunto $\{(5,-6,3)\}$ constitui uma base da imagem de T .

Indique a lista completa de afirmações correctas.

A) III **B)** I e IV **C)** I e III **D)** II, III e IV
A resposta correcta é A) OBS.: aqui havia uma gralha no enunciado, pois em lugar do vector linha $(-1,-5,-3,1)$ figurava $(1,-5,-3,1)$.

Problema 3 (2 valores)
Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

relativamente às bases canónicas correspondentes. Determine quais dos seguintes vectores pertencem ao núcleo da transformação.

I. $(5, -2, 0, 3)$

II. $(-3, 4, 0, 2)$

III. $(0, 0, 0)$

IV. $(0, -1, 1, 0)$

Indique a lista completa e correcta de vectores que pertencem ao núcleo.

A) IV **B)** Nenhum **C)** III **D)** II e IV
A resposta correcta é D)

Problema 4 (2 valores)
Considere a transformação que tomando um vector de $\mathbb{R}^2$ o reflecte relativamente ao eixo dos xx, seguidamente lhe imprime um deslizamento dado pela multiplicação por $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e finalmente o contrai para metade. Quais os valores próprios desta transformação?

A) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

B) $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ e $\lambda_2 = 0$

C) $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

D) $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{4}{3}$

A resposta correcta é A)

Problema 5 (8 valores)
Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (-x + z, x + z, -3z)$.

a) **(2 valores)** Determine a matriz $A = M(T, B_c^{(3)}, B_c^{(3)})$ que representa T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) **(4 valores)** Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $B' = \{(-2, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, -1)\}$. Determine a matriz $C = M(T, B', B')$ que representa T relativamente à base B'. Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando C com a matriz A da alínea anterior através das matrizes mudança de base, que também devem ser apresentadas explicitamente.

c) **(2 valores)** Determine os valores próprios da transformação linear T e escreva a matriz que representa T na base dos vectores próprios da transformação.

Apresente todos os cálculos que efectuar!

Solução: para a) *e* b) *indicamos apenas o diagrama comutativo que estabelece a relação:*

$$C = P^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R}^3_{B_c^{(3)}} \arrow[r, "A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}"] & \mathbb{R}^3_{B_c^{(3)}} \arrow[d, "P^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}"] \\
\mathbb{R}^3_{B_1} \arrow[u, "P=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}"] \arrow[r, "C=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}"] & \mathbb{R}^3_{B_1}
\end{tikzcd}$$

c) *A matriz que representa* T *na base dos vectores próprios é a matriz diagonal com os valores próprios na diagonal principal:*

$$D = M(T, B_{ve.p.}, B_{ve.p.}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 6 (4 valores)
Considere a aplicação linear

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & \mathbf{x} & \longmapsto & T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \end{array}$$

a) **(2 valores)** Utilize a informação dada na seguinte tabela:

A	4×4	4×4	4×4	6×5	5×6
car A	4	3	2	5	5
nul T	0	1	2	0	1
injectividade	sim	não	não	sim	não
sobrejectividade	sim	não	não	não	sim

para determinar a dimensão do núcleo de T, preenchendo os respectivos campos vazios da tabela. Preencha ainda os campos sobre a injectividade ou sobrejectividade, escrevendo sim ou não.

b) **(2 valores)** Apresente um exemplo de transformação invertível com $n = m = 4$ e um exemplo de transformação não-invertível com $n = m = 4$. **Justifique!**

Solução : b) *Exemplo de transformação invertível:*

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & \mathbf{x} & \longmapsto & T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{array}$$

a tranformação identidade em $\mathbb{R}^4$ *é invertível porque* $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ *e a sua inversa é também a tranformação identidade em* $\mathbb{R}^4$*.*
Exemplo de transformação não-invertível:

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} & \longmapsto & T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a tranformação que projecta vectores de $\mathbb{R}^4$ *no plano-xyz não é invertível porque* $\mathcal{N}(T) = \mathcal{L}\{(0,0,0,1)\}$*, i.e. tem núcleo não-trivial e, consequentemente, não tem inversa.*