Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} semestre 03/04

3^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
20 de Dezembro de 2003 (9:00)

Teste 301

Nome:
Número:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **2 horas** e consiste de quatro perguntas. As perguntas estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na tabela abaixo.

N.B.: se tiver nota inferior a 7.5 valores neste teste fica automaticamente reprovado.

O quadro abaixo destina-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Perg 1.a)	2 Val	
Perg 1.b)	1.5 Val	
Perg 1.c)	2 Val	
Perg 2.a)	2 Val	
Perg 2.b)	2 Val	
Perg 2.c)	1.5 Val	
Perg 3.a)	1.5 Val	
Perg 3.b)	1.5 Val	
Perg 3.c)	2 Val	
Perg 4	4 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (5.5 valores)
Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

a) (2 valores) Determine em função do parâmetro β, o núcleo e o espaço das colunas da matriz A. Escreva bases para esses espaços e indique as respectivas dimensões.

b) (1.5 valores) Calcule o determinante da matriz A e indique os valores de β para os quais a matriz é invertível.

c) (2 valores) Seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ um vector para o qual $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite a solução $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0)$. Discutindo em função de β, determine a solução geral do sistema de equações lineares.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) *Para* $\beta = -3$, *temos* $\dim \mathcal{N}ucl A = 1$ *e uma base para o núcleo poderá ser dada por* $\{(1, 0, 1, 0)\}$, *enquanto* $\dim \mathcal{C}ol A = 3$ *e uma base para o espaço das colunas poderá ser dada por* $\{(1, 0, 3, 3), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, -3, 0)\}$*; para* $\beta \neq -3$, *temos* $\dim \mathcal{N}ucl A = 0$ *e* $\mathcal{N}ucl A = \{(0, 0, 0, 0)\}$ *(não existe base para este subespaço), enquanto* $\dim \mathcal{C}ol A = 4$ *e uma base para o espaço das colunas será dada pelo conjunto formado pelas quatro colunas de* A.
(b) $\det A = -(\beta + 3)^2$, *que se anula para* $\beta = -3$. *Logo,* A *é invertível sse* $\beta \neq -3$.
(c) *Para* $\beta = -3$, *temos a solução geral* $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0) + t(1, 0, 1, 0)$ *para todo o* $t \in \mathbb{R}$ *(solução particular+elemento do núcleo). Para* $\beta \neq -3$, *temos a solução geral e única (SEL possível e determinado)* $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0)$

Problema 2 (5.5 valores)
Considere em $\mathbb{R}^4$ a expansão linear $W = \mathcal{L}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, em que $\mathbf{x} = (0, 1, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (-1, 0, 0, 2)$, $\mathbf{z} = (-1, 1, 0, 1)$.

a) (2 valores) Justifique que W é subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ e indique a sua dimensão. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e construa uma base ortonormal para W.

b) (2 valores) Determine o complemento ortogonal $W^\perp$. Escreva uma base para $W^\perp$ e indique a dimensão de $W^\perp$.

c) (1.5 valores) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e determine as equações cartesianas do subespaço linear W. Calcule a distância do vector $(0, 1, 2, 1)$ ao subespaço linear W.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) *W é subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ porque é combinação linear de* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{z}$, *ou seja se dois vectores pertencerem a W, então também a sua soma e múltiplos escalar estão em W. Uma base de W poderá ser dada por* $\{(0, 1, 0, -1), (-1, 1, 0, 1)\}$ *visto que* $(-1, 0, 0, 2) = -(0, 1, 0, -1) + (-1, 1, 0, 1)$*; temos então* $\dim W = 2$. *Uma base ortonormal para W será dada por* $\{(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
(b) $W^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_4 = 0,\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$. *Uma base para $W^\perp$ poderá ser dada pelo conjunto* $\{(0, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1)\}$, *logo* $\dim W^\perp = 2$.
(c) *As equações cartesianas do subespaço linear W são* $x_3 = 0$ *e* $2x_1 + x_2 + x_4 = 0$. *Temos ainda que* $d((0, 1, 2, 1), W) = \|\mathrm{proj}_{W^\perp}(0, 1, 2, 1)\| = \frac{\sqrt{42}}{3}$. *Atenção: para o cálculo da distância só podemos usar projecções sobre subespaços com bases ortogonais!!!*

Problema 3 (5 valores)
Considere a transformação linear

$$T : \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

definida por $T(A) = MA - AM$, em que M é uma matriz que pertence ao subespaço linear das matrizes anti-simétricas, ou seja a $M \in \mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) : A = -A^T\}$.

a) (1.5 valores) Determine uma base para o subespaço linear $\mathcal{W}$ e indique a sua dimensão.

b) (1.5 valores) Mostre que $\mathcal{W}$ é um (sub)espaço invariante por T.

c) (2.0 valores) Sendo S a restrição de T a $\mathcal{W}$ e para o caso em que M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determine os valores próprios da transformação.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) *Uma base B_{a-s} para as matrizes anti-simétricas 3×3 pode ser dada pelo conjunto*

$$B_{a-s} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

pelo que $\dim\mathcal{W} = 3$.
(b) *Temos de mostrar que a transformação T é tal que se $A \in \mathcal{W}$, então $T(A) \in \mathcal{W}$, i.e. se A é uma matriz anti-simétrica, então $T(A)$ também é uma matriz anti-simétrica. Seja então $A = -A^T$, como pelo enunciado também se tem $M = -M^T$, vém*

$$T(A) = MA - AM = (-M^T)(-A^T) - (-A^T)(-M^T) = M^T A^T - A^T M^T = (AM)^T - (MA)^T = -(MA - AM)^T \text{ q.e.d.} \quad (1)$$

(c) *Sendo a matriz que representa a transformação S na base B_{a-s} das matrizes anti-simétricas determinada na alínea a) dada por*

$$M(S, B_{a-s}, B_{a-s}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

temos então o polinómio característico de S: $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 2)$ que nos dá os va.p. $\lambda = 0,\ i\sqrt{2},\ -i\sqrt{2}$)

Problema 4 (4 valores)
Seja A uma matriz $m \times n$, mostre que:
1. $\mathcal{N}ucl A = \mathcal{N}ucl(A^{\mathrm{T}}A)$ (*Sugestão: use a definição de núcleo de uma matriz*).
2. $\mathrm{car} A = \mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A)$ (*Sugestão: comece por determinar o número de colunas da matriz* $A^{\mathrm{T}}A$).
Justifique todas as afirmações!

Uma demonstração válida: 1. Mostrar que $\mathcal{N}ucl A = \mathcal{N}ucl(A^{\mathrm{T}}A)$ *equivale a mostrar que* $\mathbf{x}$ *é solução de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *sse* $\mathbf{x}$ *é solução de* $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Temos então para a condição suficiente:*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow A^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}) = A^{\mathrm{T}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e para a condição necessária:

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(A\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{x}A)^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{x}A)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \text{ ou } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ q.e.d.} \end{aligned} \tag{2}$$

2. A matriz $A^{\mathrm{T}}A$ *tem* n *colunas (e também* n *linhas). Assim, do resultado anterior temos* $\mathrm{nul} A = \mathrm{nul}(A^{\mathrm{T}}A)$ *e comparando no Teorema da dimensão as dimensões para* A*:*

$$\mathrm{car} A + \mathrm{nul} A = n$$

com as dimensões para $A^{\mathrm{T}}A$*:*

$$\mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A) + \mathrm{nul}(A^{\mathrm{T}}A) = n$$

só podemos concluir que $\mathrm{car} A = \mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A)$ *q.e.d.*