Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} **semestre 03/04**

REPESCAGEM DO 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
21 de Janeiro de 2004 (9:00)

Teste 303

Nome:
Número:
Curso:
Turma:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **2 horas** e consiste de quatro perguntas. As perguntas estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na tabela abaixo.
N.B.: este teste de repescagem tem nota mínima de 7.5 valores.

O quadro abaixo destina-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Perg 1.a)	1.5 Val	
Perg 1.b)	1.5 Val	
Perg 1.c)	1.5 Val	
Perg 1.d)	1.5 Val	
Perg 2.a)	2 Val	
Perg 2.b)	1.5 Val	
Perg 2.c)	1 Val	
Perg 2.d)	1.5 Val	
Perg 3.a)	1.5 Val	
Perg 3.b)	1.5 Val	
Perg 3.c)	2 Val	
Perg 4.a)	1.5 Val	
Perg 4.b)	1.5 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (6 valores)
Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

a) (1.5 valores) Seja $\mathbf{b} = (-1, 0, -1, \delta)$, discuta em função de α e de δ o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) (1.5 valores) Determine em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, a característica e a nulidade da matriz A.

c) (1.5 valores) Indique em cada caso da alínea anterior, uma base para o espaço das colunas e para o núcleo da matriz A.

d) (1.5 valores) Seja A a matriz que representa a transformaçao linear T em $\mathbb{R}^4$ relativamente à base canónica. Justifique, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, se T é bijectiva.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 2 (6 valores)
Considere em $\mathbb{R}^4$ o subespaço linear definido por

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = z,\, w = 0\}$$

Seja ainda o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$.

a) (2 valores) Determine o complemento ortogonal $V^\perp$ do subespaço linear dado. Escreva uma base ortonormal para $V^\perp$ e indique a dimensão de $V^\perp$.

b) (1.5 valores) Determine uma base ortonormal para V.

c) (1.0 valor) Calcule a distância do vector $(0, -1-, 2, 1)$ ao subespaço linear V.

d) (1.5 valores) Mostre que V e $V^\perp$ decompõem $\mathbb{R}^4$ numa soma directa.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 3 (5 valores)
Considere no espaço linear $\mathcal{P}_3$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a três o seguinte subespaço linear

$$\mathcal{W} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p'(0) = 0\}$$

onde p' designa a derivada de p. Seja ainda no espaço linear $\mathcal{P}_3$ a transformação linear $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$p(t) \mapsto t^2 p''(t) + tp'(t) - \mu p(t)$$

onde p'' representa a segunda derivada de p.

a) (1.5 valores) Determine uma base para o subespaço linear $\mathcal{W}$ e indique a sua dimensão.

b) (1.5 valores) Sendo S a restrição de T a $\mathcal{W}$, determine a matriz que representa a transformação linear S em relação à base que calculou na alínea anterior.

Alernativa: se não sabe calcular a base de $\mathcal{W}$, determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica de $\mathcal{P}_3$.

c) (2 valores) Diga, justificando, para que valores de μ a transformação linear S é invertível. Determine o núcleo de S para os valores críticos de μ, i.e. os valores de μ para os quais S não é invertível.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 4 (3 valores)
Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais e a propriedade $A^{\mathrm{T}} = A$. Mostre que se $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para um dado vector $\mathbf{x}$ não-nulo de $\mathbb{C}^n$, então :

a) (1.5 valores) λ é um número real.

(*Sugestão: mostre que o produto* $\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$ *é um número real*)

b) (1.5 valores) a parte real de $\mathbf{x}$, $\mathrm{Re}\,\mathbf{x}$, é um vector próprio de A.

(*Sugestão: analise a parte real e imaginária de* $A\mathbf{x}$)

Justifique todos os passos!