

REPESCAGEM DO 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERCI, LEGI, LEE
21 de Janeiro de 2004 (9:00)

Teste 304

Nome:

Número:

Curso:

Turma:

Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **2 horas** e consiste de quatro perguntas. As perguntas estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na tabela abaixo.

N.B.: este teste de repescagem tem nota mínima de 7.5 valores.

O quadro abaixo destina-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Perg 1.a)	1.5 Val	
Perg 1.b)	1.5 Val	
Perg 1.c)	1.5 Val	
Perg 1.d)	1.5 Val	
Perg 2.a)	2 Val	
Perg 2.b)	1.5 Val	
Perg 2.c)	1 Val	
Perg 2.d)	1.5 Val	
Perg 3.a)	1.5 Val	
Perg 3.b)	1.5 Val	
Perg 3.c)	2 Val	
Perg 4.a)	1.5 Val	
Perg 4.b)	1.5 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (6 valores)

Considere a seguinte matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

- a) (1.5 valores) Seja $\mathbf{c} = (-1, 0, -1, \alpha)$, discuta em função de α e de β o sistema de equações lineares $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$.
- b) (1.5 valores) Determine em função do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$, a característica e a nulidade da matriz B .
- c) (1.5 valores) Indique em cada caso da alínea anterior, uma base para o espaço das colunas e para o núcleo da matriz B .
- d) (1.5 valores) Seja B a matriz que representa a transformação linear T em \mathbb{R}^4 relativamente à base canónica. Justifique, para todo o $\beta \in \mathbb{R}$, se T é bijectiva.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 2 (6 valores)

Considere em \mathbb{R}^4 o subespaço linear definido por

$$H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = 0\}$$

Seja ainda o produto interno usual em \mathbb{R}^4 .

- a) (2 valores) Determine o complemento ortogonal H^\perp do subespaço linear dado. Escreva uma base ortonormal para H^\perp e indique a dimensão de H^\perp .
- b) (1.5 valores) Determine uma base ortonormal para H .
- c) (1.0 valor) Calcule a distância do vector $(-1, 0, 0, -2)$ ao subespaço linear H .
- d) (1.5 valores) Mostre que H e H^\perp decompõem \mathbb{R}^4 numa soma directa.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 3 (5 valores)

Considere no espaço linear \mathcal{P}_3 dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a três o seguinte subespaço linear

$$\mathcal{W} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p''(0) = 0\}$$

onde p'' designa a segunda derivada de p . Seja ainda no espaço linear \mathcal{P}_3 a transformação linear $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ definida por

$$p(x) \mapsto x^2 p''(x) - x p'(x) + \nu p(x)$$

onde p' designa a primeira derivada de p .

- a) (1.5 valores) Determine uma base para o subespaço linear \mathcal{W} e indique a sua dimensão.
- b) (1.5 valores) Sendo R a restrição de T a \mathcal{W} , determine a matriz que representa a transformação linear R em relação à base que calculou na alínea anterior.
Alternativa: se não sabe calcular a base de \mathcal{W} , determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica de \mathcal{P}_3 .
- c) (2 valores) Diga, justificando, para que valores de ν a transformação linear R é invertível. Determine o núcleo de R para os valores críticos de ν , i.e. os valores de ν para os quais S não é invertível.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 4 (3 valores)

Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais e a propriedade $A^T = A$. Mostre que se $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para um dado vector \mathbf{x} não-nulo de \mathbb{C}^n , então :

a) (1.5 valores) λ é um número real.

(Sugestão: mostre que o produto $\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$ é um número real)

b) (1.5 valores) a parte real de \mathbf{x} , $\text{Re } \mathbf{x}$, é um vector próprio de A .

(Sugestão: analise a parte real e imaginária de $A\mathbf{x}$)

Justifique todos os passos!