

10ª Aula Prática

1) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a)
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

b)
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

c)
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z(x-y)^2}{(x-y)^4 + z^2}$$

d)
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} z \log xy$$

2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação dada por :

$$f(x, y) = (y + 1)^2 - \frac{3x(y + 1)}{2}.$$

a) Calcule o limite segundo a recta que passa pelo ponto $(0, -1)$ com direcção $(1, 1)$ da seguinte função $\frac{f(x,y)}{x^2+(y+1)^2}$.

b) Calcule o limite segundo a recta que passa pelo ponto $(0, -1)$ com direcção $(1, -1)$ da função da alínea anterior

c) Estude a função $\frac{f(x,y)}{x^2+(y+1)^2}$ quanto à continuidade.

3) Considere a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela expressão

$$f(x, y) = \left(\log(4 - x^2 - y^2), \frac{\text{sen}(x + y)}{x + y} \right)$$

a) Represente geometricamente o domínio D , e diga se é aberto, fechado ou limitado.

b) Verifique se f é prolongável por continuidade a algum ponto fronteiro a D .

4) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2 + y^2, \frac{\text{sh}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0, 0) & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.

5) Calcule, se existir, o limite $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t)$ para as seguintes funções vectoriais:

a) $\mathbf{f}(t) = (1 + 2t, 3 - t, 2 + 3t)$

b) $\mathbf{f}(t) = (e^t, \log t, \text{arctg } t)$

c) $\mathbf{f}(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}, te^{2t}, \text{sec } t \right)$