Inferência e Decisão I

Exercícios Complementares

para

Catarina Soares

Exercício 4.1 Seja X uma v.a. com distribuição $Exp(1)$, e defina Y como sendo a parte inteira de $X + 1$, i.e.

$$Y = i + 1 \Leftrightarrow i \leq X \leq i + 1, \quad i \in I\!N.$$

(a) Determine a distribuição de Y e identifique-a.

(b) Determine a distribuição condicional de $X - 4$ dado que $Y \geq 5$.

Exercício 4.2 Um ponto (de coordenadas polares) é gerado aleatoriamente no plano, de acordo com o seguinte esquema : o raio R é escolhido aleatoriamente, sendo que $R^2 \sim \chi^2_2$; independentemente de R é gerado um ângulo θ, com $\theta \sim Uniforme(0, 2\pi)$. Determine a f.d.p. conjunta do par $(X = R\cos\theta, Y = R\sin\theta)$.

Exercício 4.3 Sejam X e Y duas v.a. independentes, com $X \sim Exp(\lambda)$ e $Y \sim Exp(\mu)$, sendo porém impossível observar X e Y directamente. Em vez disso observa-se

$$Z = \min\{X, Y\}, \quad W = \begin{cases} 1 & Z = X \\ 0 & Z = Y \end{cases}$$

(a) Determine a distribuição conjunta de Z e W.

(b) Prove que Z e W são independentes.

Exercício 4.4 Assumindo as condições necessárias, use o lema de Stein (ver exercícios do capítulo 3) para provar os seguintes resultados:

(a) Se $X \sim Gama(\alpha, \beta)$ então

$$E\left[g(X)(X - \alpha\beta)|\alpha, \beta\right] = \beta E\left[Xg'(X)|\alpha, \beta\right]$$

(b) Se $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ então

$$E\left[g(X)(\beta - (\alpha - 1)\frac{1 - X}{X}|\alpha, \beta\right] = E\left[(1 - X)g'(X)|\alpha, \beta\right]$$

Exercício 4.5 Seja X uma v.a. que toma os valores $0, 1$ e 2, de acordo com uma das seguintes distribuições:

	P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	
Distribuição 1	p	$3p$	$1-4p$	$0 < p < \frac{1}{4}$
Distribuição 2	p	p^2	$1-p-p^2$	$0 < p < \frac{1}{2}$

Determine em cada um dos dois casos se a família de distribuições de X é completa.

Exercício 4.6 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações aleatórias de uma família de localização e escala. Considere-se $T_1(X_1, \ldots, X_n)$ e $T_2(X_1, \ldots, X_n)$ duas estatísticas para as quais

$$T_i(ax_1 + b, \ldots, ax_n + b) = aT_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2$$

para quaisquer valores de $x_1, \ldots, x_n, b$ e $a > 0$.

(a) Prove que T_1/T_2 é uma estatística ancilar.

(b) Seja $R = X_{(n)} - X_{(1)}$, e $S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$. Prove que R/S é uma estatística ancilar.

Exercício 4.7 Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma a.a. da família

$$\mathcal{F} = \{f(x|\lambda, \delta) = \frac{1}{\delta}e^{-(x-\lambda)/\delta}I_{(\lambda,\infty)}(x), \lambda \in I\!R, \delta \in I\!R^+\}$$

Prove as seguintes afirmações:

(a) $(\bar{X}, X_{(1)})$ é uma estatística suficiente mínima para (λ, δ).

(b) $\bar{X}$ é uma estatística suficiente mínima para δ se λ for conhecido.

(c) $X_{(1)}$ é uma estatística suficiente mínima para λ se δ for conhecido.