Inferência e Decisão I

Colectânea de Exercícios

2003/04

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LMAC

Capítulo 1

Introdução e revisões

Nota: os exercícios assinalados com $\star$ ($\star\star$) provêm da colectânea de PE1 (PE2).

Exercício 1.1 $\star$ A emissão de partículas por uma fonte radioactiva é feita segundo um processo de Poisson. Sabendo que a probabilidade de não ser emitida qualquer partícula num intervalo de tempo de amplitude unitária é 1/3, calcule:

(a) A probabilidade de que a fonte emita pelo menos 2 partículas num intervalo de tempo de amplitude unitária.

(b) A probabilidade de decorrerem pelo menos 3 unidades de tempo entre duas emissões consecutivas de partículas.

Exercício 1.2 $\star$ Um processo de fabrico de placas de vidro produz, em média, 4 bolhas de ar por $10\,m^2$ de placa. Sabendo que a distribuição de bolhas de ar na placa pode ser modelada por um processo de Poisson, calcule a probabilidade de:

(a) Uma placa de $2.5m \times 2m$ ter mais de 2 bolhas de ar.

(b) Num lote de 10 placas de vidro com $1m \times 2.5m$ obter 6 placas perfeitas.

(c) Ser necessário observar 5 placas de vidro com $2.5m \times 2m$ para encontrar 2 placas perfeitas.

Exercício 1.3 $\star$ A emissão de uma fonte radioactiva é tal que o número de partículas emitidas em cada período de 10 segundos, X, tem distribuição de Poisson com $E(X^2) = 6$.

(a) Observada a emissão durante 7 períodos consecutivos de 10 segundos, qual é a probabilidade de serem emitidas 4 ou mais partículas em pelo menos um desses períodos?

(b) Um contador Geiger-Muller, que vai registando as emissões sucessivas, tem probabilidade 0.9 de registar cada partícula que é emitida.

i) Sabendo que o número de partículas registadas em x ($x \geq 1$) partículas emitidas por período tem uma distribuição binomial, mostre que o número de partículas registadas por período tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0.9 \times 2$.

ii) Determine o valor esperado e a mediana do número de partículas registadas por período.

Exercício 1.4 $\star$ Num lote de 500 peças existem 50 defeituosas. Desse lote retira-se ao acaso e com reposição uma amostra. O lote é rejeitado se tal amostra incluir mais do que duas peças defeituosas. Calcule:

(a) A probabilidade de rejeição do lote se a amostra tiver dimensão 10.

(b) A dimensão que a amostra deve ter para que a probabilidade de rejeição seja inferior a 0.05.

(c) Nas condições da alínea (a) e se existirem 100 lotes nas condições indicadas, qual é o número esperado de lotes rejeitados?

Exercício 1.5 Numa variável aleatória discreta com distribuição truncada existe uma classe de valores que não pode ser observada, sendo por isso eliminada do espaço amostral. Em particular, se X toma valores $0, 1, \ldots$ e se a classe 0 não pode ser observada (o que é geralmente o caso), a correspondente v.a. X_T truncada no ponto 0 tem função de probabilidade

$$P(X_T = x|\theta) = \frac{P(X = x|\theta)}{P(X > 0|\theta)}, \quad x \in I\!N$$

onde θ designa o parâmetro da f.p. de X. Determine a função de probabilidade, o valor esperado e a variância de X_T quando

(a) $X \sim Poisson(\lambda)$.

(b) $X \sim BN(r, p)$.

Exercício 1.6 Seja $X \sim BN(r, p)$ e considere-se $r \to 0$. Obtém-se então uma distribuição usualmente designada por *distribuição de série logarítmica*, cuja função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x|p) = \frac{-(1-p)^x}{x \log p}, \quad x \in I\!N$$

com $p \in (0, 1)$.

(a) Verifique que se trata de uma função de probabilidade.

(b) Determine o seu valor esperado e variância.

Exercício 1.7 $\star\star$ Para $\alpha > 0$ a função gama é definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Mostre que

(a) $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n \in I\!N$.

(b) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in I\!N$.

(c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exercício 1.8 $\star\star$ Uma v.a. X tem distribuição $Gama(\alpha, \beta)$ se a sua função densidade de probabilidade é:

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(x).$$

(a) Verifique que se $Y \sim Exp(\lambda)$ então $Y \sim Gama(1, \lambda)$, e se $Z \sim \chi^2_{(n)}$ então $Z \sim Gama(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Calcule $E[X^r]$, com $r > 0$ quando $X \sim Gama(\alpha, \beta)$.

(c) Mostre que se $X \sim Gama(\alpha, \beta)$ então

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Exercício 1.9 Existe uma relação interessante entre a binomial negativa e a gama, permitindo nalgumas situações fornecer aproximações muito úteis. Seja então $Y \sim BN(r, p)$. Mostre que se $p \to 0$, a função geradora de momentos de pY converge para a de uma distribuição gama de parâmetros r e 1.

Exercício 1.10 Mostre que para $\alpha \in I\!N$

$$\int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \sum_{y=0}^{\alpha-1} \frac{x^y e^{-x}}{y!}$$

usando integração por partes. Exprima esta fórmula através de uma relação probabilística entre a Poisson e a gama.

Exercício 1.11 $\star\star$ Para $\alpha, \beta > 0$ a função beta é definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

podendo mostrar-se que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Diz-se então que $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ se a sua função densidade de probabilidade é

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x).$$

(a) Verifique que se $X \sim Unif(0, 1)$ então $X \sim Beta(1, 1)$.

(b) Calcule $E[X^r]$, com $r > 0$, para $X \sim Beta(\alpha, \beta)$.

(c) Mostre que se $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ então

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Exercício 1.12 Mostre que as famílias de distribuições que se seguem pertencem à família exponencial. Indique ainda a parametrização natural.

(a) $\{N(\mu, \sigma^2), \mu \in I\!R, \sigma \in I\!R^+\}$.

(b) $\{Gama(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in I\!R^+\}$.

(c) $\{Beta(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in I\!R^+\}$.

(d) $\{Poisson(\lambda), \lambda \in I\!R^+\}$.

(e) Verifique se a afirmação é ainda válida para a família $\{BN(r, p), r \in I\!N, p \in (0, 1)\}$.

Exercício 1.13 Mostre que X tem uma distribuição de localização-escala de parâmetros λ e δ sse $\frac{X-\lambda}{\delta}$ é distribuída independentemente de (λ, δ).

Exercício 1.14 Uma família de distribuições $\{F(x|\theta), \theta \in \Theta\}$, com $\Theta \subseteq \Theta$, é estocasticamente crescente em θ se $\theta_1 > \theta_2 \Rightarrow F(x|\theta_1) \leq F(x|\theta_2), \forall x$ e $\exists x : F(x|\theta_1) < F(x|\theta_2)$. Mostre que a família de distribuições normais é estocasticamente crescente no parâmetro de localização, assumindo que o parâmetro de escala está fixo.