Inferência e Decisão I

Colectânea de Exercícios

2003/04

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LMAC

Capítulo 2

Sumarização dos dados

Exercício 2.1 Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independentes com f.d.p.

$$f_{X_i}(x|\theta) = e^{i\theta - x} I_{(i\theta,\infty)}(x)$$

Prove que $T(\underline{X}) = \min_i \frac{X_i}{i}$ é uma estatística suficiente para θ.

Exercício 2.2 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independentes com f.d.p.

$$f_{X_i}(x_i|\theta) = \frac{1}{2i\theta} I_{(-i\theta,i\theta)}(x_i)$$

Determine uma estatística suficiente bi-dimensional para θ.

Exercício 2.3 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. proveniente de uma população com f.d.p. $f_X(.|\theta)$. Prove que as estatísticas ordinais $T(\underline{X}) = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ são estatísticas suficientes para θ.

Exercício 2.4 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. Para cada uma das f.d.p. que se seguem indique uma estatística suficiente mínima para o parâmetro θ.

(a) $f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2}, \quad x \in I\!R, \theta \in I\!R.$

(b) $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \theta \in I\!R$ (exponencial deslocada)

(c) $f(x|\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1+e^{-(x-\theta)})^2}, \quad x \in I\!R, \theta \in I\!R$ (logística)

(d) $f(x|\theta) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}, \quad x \in I\!R, \theta \in I\!R$ (Cauchy)

(e) $f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad x \in I\!R, \theta \in I\!R$ (exponencial dupla).

Exercício 2.5 Determine uma estatística suficiente mínima para a família de distribuições $\mathcal{F} = \{Unif(\theta, \theta + 1), \theta \in I\!R\}$. Verifique se é uma estatística completa para a família $\mathcal{F}$.

Exercício 2.6 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. com distribuição geométrica:

$$P(X_i = x|\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1} I_{I\!N}(x)$$

com $\theta \in (0,1)$. Mostre que $\sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente para θ e determine a família de distribuições de $\sum_{i=1}^n X_i$. A família é completa?

Exercício 2.7 Uma estatística que é frequentemente ancilar é a dimensão amostral. Considere uma sequência de provas de Bernoulli i.i.d., com probabilidade de sucesso θ. Seja N o número de provas realizadas e X o número de sucessos observados nas N provas.

(a) Prove que o par (X, N) é uma estatística suficiente para θ e que N é ancilar para θ.

(b) Prove que o estimador $\frac{X}{N}$ é um estimador centrado para θ, com variância $\theta(1-\theta)\frac{E[N]}{E[N^2]}$.

Exercício 2.8 Para cada uma das f.d.p. que se seguem, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. a X. Determine uma estatística suficiente completa ou mostre que não existe nenhuma.

(a) $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$

(b) $f(x|\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}$, $\theta > 0$

(c) $f(x|\theta) = \frac{(\log\theta)\theta^x}{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, $\theta > 1$

(d) $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \exp -e^{-(x-\theta)}$

(e) $f(x|\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x} I_{\{0,1,2\}}(x)$, $\theta \in [0,1]$

Exercício 2.9 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. $N(\theta, a\theta^2)$, onde a é uma constante (conhecida) e $\theta > 0$. Mostre que a estatística $T = (\bar{X}, S^2)$ é uma estatística suficiente para θ mas a família de distribuições não é completa.