



Inferência e Decisão I

Colectânea de Exercícios

2003/04

LMAC

Capítulo 4

Testes de hipóteses

Exercício 4.1 Seja X_1, X_2, \dots, X_{10} uma a.a. proveniente de uma população $Bernoulli(\theta)$, com $\theta \in (0, 1)$.

- Determine o teste UMP para um nível de significância $\alpha = 0.0547$ para as hipóteses $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ vs $H_1 : \theta = \frac{1}{4}$. Determine a potência do teste.
- Considerando as hipóteses $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$ vs $H_1 : \theta > \frac{1}{2}$, determine o tamanho e a função potência do teste para o qual a região crítica é da forma $\{\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 6\}$.
- Para que valores de significância α existem testes UMP para o conjunto de hipóteses de (a)?

Exercício 4.2 Seja $X \sim Beta(\theta, 1)$.

- Para testar $H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$, determine o tamanho e a função potência para o teste para o qual a região de rejeição é $\{X > \frac{1}{2}\}$.
- Determine o teste mais potente para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta = 2$.
- Existe algum teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$?

Exercício 4.3 Mostre que as seguintes famílias têm razão de verossimilhanças monótona:

- $\{N(\theta, \sigma^2), \theta \in \mathbb{R}\}$, com σ^2 conhecido.
- $\{Poisson(\theta), \theta > 0\}$
- $\{Binomial(n, \theta), \theta \in (0, 1)\}$, com n conhecido.

Exercício 4.4 Seja $\mathcal{F} = \{f_X(x|\theta) = h(x)c(\theta)e^{w(\theta)t}, \theta \in \Theta\}$ uma família pertencente à família exponencial. Mostre que esta família tem razão de verossimilhanças monótona se $w(\theta)$ é uma função crescente de θ . Dê três exemplos de famílias onde tal aconteça.

Exercício 4.5 Seja $\mathcal{F} = \{Cauchy(\theta), \theta \in \mathbb{R}^+\}$.

- (a) Mostre que esta família não tem razão de verossimilhanças monótona.
- (b) Mostre que o teste cuja zona de rejeição é $W_\delta = \{1 < X < 3\}$ é o teste mais potente para testar $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta = 1$. Calcule as probabilidades de erro tipo I e de erro tipo II.

Exercício 4.6 Seja $\mathcal{F} = \{f_X(x|\theta) = \frac{\theta}{\pi} \frac{1}{\theta^2 + x^2} I_{\mathbb{R}}(x), \theta > 0\}$.

- (a) Mostre que esta família não tem razão de verossimilhanças monótona.
- (b) Seja X uma v.a. com f.d.p. pertencente a \mathcal{F} . Mostre que se se fizer uma única observação X , então $|X|$ é uma estatística suficiente para θ , e que a f.d.p. de $|X|$ não tem razão de verossimilhanças monótona.

Exercício 4.7