Inferência e Decisão I (LMAC)

2003/04

1º Teste

14 de Outubro de 2003

LMAC

Duração do Teste : 1h 30m **Justifique todas as respostas**

(Todas as alíneas valem 4 valores)

Seja $\mathcal{F} = \{N(\mu, \sigma^2), \mu \in I\!R, \sigma^2 \in I\!R^+\}$ a família de funções densidade de probabilidade normais.

(a) Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(.|\mu, \sigma^2)$ pertencente à família $\mathcal{F}$. Prove que a f.d.p. associada a $Y = |X - \mu|$ é dada por

$$f_Y(y|\mu, \sigma^2) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} I_{I\!R_0^+}(y).$$

(b) Seja $\mathcal{G} = \{g_Y(y|\sigma^2) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} I_{I\!R_0^+}(y), \sigma^2 \in I\!R_0^+\}$. Indique, justificando, uma estatística suficiente completa para $\mathcal{G}$.

(c) Comente a seguinte afirmação, justificando devidamente:

As estatísticas $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ e $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i}{Y_n}\right)^2$ possuem distribuições amostrais independentes, $\forall \sigma^2 \in I\!R^+$.

Admita agora que $\sigma^2 \in I\!R^+$ está fixo e considere a família $\mathcal{F}_\sigma$ de f.d.p. correspondentes, com

$$\mathcal{F}_\sigma = \{f(x|\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \mu \in I\!R\}.$$

(d) Prove, deduzindo uma estatística suficiente completa e uma ancilar para $\mathcal{F}_\sigma$ (usando para tal resultados conhecidos sobre a distribuição Normal) que

$$E\left[\frac{S^2}{\bar{X}}\Big|\mu\right] = \sigma^2 E\left[\frac{1}{\bar{X}}|\mu\right].$$

Será que este resultado é extensível à família $\mathcal{F}$?

(e) Considere a seguinte família de funções de probabilidade:

$$\mathcal{H} = \{h(x|\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} I_{\{-1,0,1\}}(x), \theta \in (0,1)\}.$$

Seja ainda X uma observação aleatória de um elemento desta família. Sem recorrer ao facto de que $\mathcal{H}$ pertence à família exponencial, determine uma estatística suficiente completa para a família $\mathcal{H}$. X é uma estatística suficiente completa para $\mathcal{H}$?