INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Inferência e Decisão I

Soluções da Colectânea de Exercícios 2002/03

LMAC

Capítulo 1

Introdução e Revisões

Exercício 0.1 Seja $N(s,t)$ o número de partículas emitidas pela fonte radioactiva no intervalo de tempo $(s,t]$. Pode concluir-se que $N(s,t) \sim \text{Poisson}\,((t-s)\ln 3)$.

(a) $P(N(0,1) \geq 2) = 1 - \frac{1+\ln(3)}{3} = 0.3005$.

(b) $P(N(0,3) = 0) = (1/3)^3 = 1/27$.

Exercício 0.2 Seja N_s o número de bolhas de ar numa placa com s metros quadrados de área. Pode concluir-se que $N_s \sim \text{Poisson}\,(0.4s)$.

(a) $P(N_5 > 2) = 0.3233$.

(b) Seja Y o número de placas de $2.5m^2$ perfeitas de entre 10. A probabilidade pedida é $P(Y=6) = \binom{10}{6}(e^{-1})^6(1-e^{-1})^4 = 0.0831$.

(c) Seja Z o número de placas de vidro de $5m^2$ que é necessário observar até encontrar 2 perfeitas. A probabilidade pedida é $P(Z=5) = \binom{4}{1}(e^{-2})^2(1-e^{-2})^3 = 0.0474$.

Exercício 0.3 X designa o número de partículas emitidas num período de 10 s. Pode concluir-se que $X \sim \text{Poisson}\,(2)$.

(a) Seja Y o número de períodos de 10 s, de entre 7 consecutivos, em que são emitidas 4 ou mais partículas. A probabilidade pedida é $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 0.6601$.

(b) Seja Z o número de partículas registadas num período de 10 s. Em (i) conclui-se que $Z \sim \text{Poisson}\,(1.8)$.

(ii) $\text{E}[Z] = 1.8$ e $\text{Mediana}\,(Z) = 2$.

Exercício 0.4 Seja X_n o número de peças defeituosas numa amostra de dimensão n. A partir das condições do enunciado pode concluir-se que $X_n \sim \text{Binomial}\,(n, 0.1)$.

(a) $P(X_{10} > 2) = 0.0702$.

(b) Como $\{n : P(X_n > 2) \leq 0.05\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, para que a probabilidade de rejeição do lote seja inferior a 0.05 a amostra deve ter dimensão não superior a 8.

(c) 7.02.

Exercício 0.5 (a) Seja então $X \sim Poisson(\lambda)$. Dado que $P(X > 0|\lambda) = 1 - P(X = 0|\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$, vem que

$$P(X_t = x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!(1 - e^{-\lambda})}, \quad x \in I\!N$$

Quanto aos momentos:

$$\begin{aligned}
E[X_T|\lambda] &= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{P(X = x)}{P(X > 0)} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x) \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} E[X] = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \\
Var[X_T|\lambda] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2\frac{P(X = x)}{P(X > 0)} - (\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}})^2 \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{x=0}^{\infty} x^2P(X = x) - (\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}})^2 \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}(\lambda + \lambda^2) - (\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}})^2 \\
&= \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)}{(1 - e^{-\lambda})^2}
\end{aligned}$$

(b) Seja agora $X \sim BN(r, p)$, com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x|r, p) = \binom{r+x-1}{x} p^r(1 - p)^x, \quad x \in I\!N_0$$

Dado que $P(X > 0|r, p) = 1 - P(X = 0) = 1 - p^r$, vem que

$$P(X_T = x|r, p) = \frac{\binom{r+x-1}{x} p^r(1 - p)^x}{1 - p^r}, \quad x \in I\!N.$$

Quanto aos momentos:

$$\begin{aligned}
E[X_T|r, p] &= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\binom{r+x-1}{x} p^r(1 - p)^x}{1 - p^r} = \frac{1}{1 - p^r}E[X|r, p] = \frac{r(1 - p)}{p(1 - p^r)} \\
Var[X_T|r, p] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2\frac{\binom{r+x-1}{x} p^r(1 - p)^x}{1 - p^r} - \left(\frac{r(1 - p)}{p(1 - p^r)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{1 - p^r}(\frac{r(1 - p)}{p^2} + \frac{r^2(1 - p)^2}{p^2}) - \left(\frac{r(1 - p)}{p(1 - p^r)}\right)^2
\end{aligned}$$

Exercício 0.6 (a) Dado que $-\frac{(1-p)^x}{x \log p} \geq 0, \forall x$, para provar que se trata de uma função de probabilidade basta verificar se

$$\sum_{x \in I\!N} \frac{-(1-p)^x}{x \log p} = 1$$

Mas o resultado é trivial uma vez que $\sum_{x \in I\!N} \frac{-(1-p)^x}{x} = \log p$.

(b)

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{-\log p} \sum_{x \in I\!N} (1-p)^x = \frac{1}{-\log p} \frac{1-p}{p} \\ E[X^2] &= \frac{1}{-\log p} \sum_{x \in I\!N} x(1-p)^x = \frac{1}{-\log p} \frac{1-p}{p^2} \\ Var[X] &= \frac{1}{-\log p} \frac{1-p}{p^2} - \left(\frac{1}{-\log p} \frac{1-p}{p} \right)^2 = \frac{(p-1)(1-p+\log p)}{p^2 (\log p)^2} \end{aligned}$$

Exercício 0.7 (a)

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \\ \Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_{x=0}^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n \in I\!N \\ &= n\Gamma(n) \end{aligned}$$

(b) Decorre da alínea anterior, usando um argumento de indução.

(c) Recorde-se que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2}$$

uma vez que $\int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx$ (argumento de simetria) e $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f_{N(0,1)}(x) dx = \sqrt{2\pi}$.

Seja agora $z = \frac{1}{2}x^2$ (i.e. $x = \sqrt{2} z^{1/2}$). Então fazendo a substituição no integral anterior vem:

$$\sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = \int_0^\infty e^{-z} \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1/2} dz$$

ou seja, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty z^{-1/2} e^{-z} dz = \sqrt{\pi}$.

Exercício 0.8 (a) Decorre directamente das definições das distribuições, uma vez que se $Y \sim Exp(\lambda)$,

$$f_Y(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y} I_{(0,\infty)}(y) = \frac{\lambda}{\Gamma(1)} y^{1-1} e^{-\lambda y} I_{(0,\infty)}(y)$$

pelo que Y tem efectivamente uma distribuição $Gama(1, \lambda)$.

Se $Z \sim \chi^2_{(n)}$, então

$$f_Z(z|n) = \frac{e^{-z/2} z^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} I_{(0,\infty)}(z)$$

que corresponde efectivamente a uma $Gama(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Seja $X \sim Gama(\alpha, \beta)$. Então

$$\begin{aligned} E[X^r] &= \int_0^\infty x^r \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)\beta^r} \int_0^\infty \frac{\beta^{r+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+r)} x^{r+\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)\beta^r} \end{aligned}$$

(c) Decorre da alínea anterior.

Exercício 0.9 Seja então $Y \sim BN(r, p)$, a que corresponde a função geradora de momentos

$$M_Y(t|r,p) = p^r(1-qe^t)^{-r}, \quad {}^q e^t < 1$$

com $q = 1 - p$. Segue-se então que a função geradora de momentos da v.a. pY é igual a

$$M_{pY}(t|r,p) = E[e^{tpY}] = M_Y(tp|r,p) = p^r(1-qe^{tp})^{-r}, \quad qe^{tp} < 1$$

pelo que tomando limites quando p tende para zero, obtém-se

$$\lim_{p \to 0} M_{pY}(t|r,p) = \lim_{p \to 0} (\frac{p}{1-qe^{tp}})^r.$$

Utilizando a Regra de l´Hôpital, vem que

$$\lim_{p \to 0} (\frac{p}{1-qe^{tp}})^r = \left[\lim_{p \to 0} \frac{1}{e^{pt}(-t+1+pt)}\right]^r = \left[\frac{1}{-t+1}\right]^r$$

que efectivamente corresponde à f.g.m. de uma $Gama(r, 1)$.

Exercício 0.10 Prova-se por indução. Dado que o resultado é óbvio para $\alpha = 1$, tome-se $\alpha > 1$. Seja

$$G(\alpha) = \int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

Então

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(-z^{\alpha-1} e^{-z} \Big|_x^\infty + (\alpha-1) \int_x^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} e^{-x} + G(\alpha-1) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} e^{-x} + \sum_{y=0}^{\alpha-2} \frac{x^y e^x}{y!} \quad \text{por hipótese de indução} \\ &= \sum_{y=0}^{\alpha-1} \frac{x^y e^x}{y!}. \end{aligned}$$

Seja $X \sim Gama(\alpha, 1)$ e $Y \sim Poisson(x)$. Então a relação anterior diz que

$$P(X > x | X \sim Gama(\alpha, 1)) = P(Y \leq \alpha - 1 | Y \sim Poisson(x))$$

(nota: pensar na relação entre exponencial e Poisson, e entre Erlang e Poisson).

Exercício 0.11 (a) Se $X \sim Unif(0,1)$ então $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$. Note-se que das propriedades da função Γ decorre que

$$f_{Beta(1,1)}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} x^0 (1-x)^0 I_{(0,1)}(x) = \frac{1!}{1 \times 1} I_{(0,1)}(x) = I_{(0,1)}(x)$$

pelo que $X \sim Beta(1,1)$.

(b) Se $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, então

$$\begin{aligned} E[X^r] &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{r+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{B(r+\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \frac{1}{B(r+\alpha,\beta)} x^{r+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{B(r+\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+r)} \end{aligned}$$

(c) Decorre da alínea anterior.

Exercício 0.12 Uma família de f.d.p. ou f.p. de parâmetro θ é uma família exponencial se a f.d.p. ou a f.p. poder ser expressa da seguinte forma:

$$f_X(x|\theta) = h(x)c(\theta)\exp(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta)t_i(x))$$

onde $h(x) \geq 0$, $t_1(x), \ldots, t_k(x)$ são funções reais da observação x (não dependem de θ), $c(\theta) \geq 0$ e $w_1(\theta), \ldots, w_k(\theta)$ são funções reais de θ (não dependem de x).

Uma família exponencial por vezes pode ser reparametrizada da seguinte forma:

$$f_X(x|\eta) = h(x)c^\star(\eta)\exp(\sum_{i=1}^{k} w_i^\star(\eta)t_i(x))$$

onde $\int h(x)\exp(\sum_{i=1}^{k} w_i^\star(\eta)t_i(x))dx < \infty$ e $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$.

(a) $\{N(\mu,\sigma^2), \mu \in I\!R, \sigma \in I\!R^+\}$

Dado que

$$\begin{aligned} f_X(x|\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{\mu x}{\sigma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu x}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

fazendo

$$\begin{aligned} &h(x) = 1 \geq 0, \forall x \in I\!R, \quad k=2, \quad c(\mu,\sigma) = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} I_{(0,\infty)}(\sigma) \\ &w_1(\mu,\sigma) = \frac{1}{2\sigma^2} I_{(0,\infty)}(\sigma), \quad w_2(\mu,\sigma) = \frac{\mu}{\sigma^2} I_{(0,\infty)}(\sigma) \\ &t_1(x) = -x^2, \quad t_2(x) = x \end{aligned}$$

vem que efectivamente a família de f.d.p. normais pertence à família exponencial.

Note-se que neste caso a reparametrização natural é: $\eta_1 = 1/\sigma^2 I_{(0,\infty)}(\sigma)$ e $\eta_2 = \frac{\mu}{\sigma^2} I_{(0,\infty)}(\sigma)$, pelo que o espaço paramétrico natural é $R^+ \times I\!R$.

(b) $\{Gama(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in I\!R^+\}$

$$\begin{aligned} f_X(x|\alpha,\beta) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x) \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} I_{(0,\infty)}(x) e^{(\alpha-1)\log x - \beta x} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} &h(x) = I_{(0,\infty)}(x) \geq 0, \forall x, \quad c(\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} I_{(0,\infty)}(x) \\ &w_1(\alpha,\beta) = \alpha - 1, \quad w_2(\alpha,\beta) = -\beta, \quad t_1(x) = \log x, \quad t_2(x) = x. \end{aligned}$$

Fazendo $\eta_1 = \alpha - 1, \eta_2 = -\beta$, vem que o espaço paramétrico natural é $]-1,\infty[\times I\!R^-$.

(c) $\{Beta(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in I\!R^+\}$

$$\begin{aligned} f_X(x|\alpha,\beta) &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x) \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} I_{(0,1)}(x) e^{(\alpha-1)\log x + (\beta-1)\log(1-x)} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} &h(x) = I_{(0,1)}(x) \geq 0, \forall x, \quad c(\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha)} I_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(\alpha,\beta) \\ &w_1(\alpha,\beta) = \alpha - 1, \quad w_2(\alpha,\beta) = \beta - 1, \quad t_1(x) = \log x, \quad t_2(x) = \log(1-x). \end{aligned}$$

Fazendo $\eta_1 = \alpha - 1, \eta_2 = \beta - 1$, vem que o espaço paramétrico natural é .

(d) $\{Poisson(\lambda), \lambda \in I\!R^+\}$

$$f_X(x|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{I_{I\!N}(x)}{x!} e^{x \log \lambda}$$

pelo que

$$\begin{aligned} &h(x) = \frac{I_{I\!N}(x)}{x!} \geq 0, \forall x, \quad c(\lambda) = e^{-\lambda} \\ &w(\lambda) = \log \lambda, \quad t(x) = x. \end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \log \lambda I_{(0,\infty)}(\lambda) > 0$, vem que o espaço paramétrico natural é $I\!R^+$.

(e) $\{BN(r,p), r \in I\!N, p \in (0,1)\}$

$$f_X(x|r,p) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^r I_{I\!N_0}(x)$$

pelo que a binomial negativa só pertence à família exponencial se r for conhecido. Nessa situação:

$$\begin{aligned} &h(x) = \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} I_{I\!N_0}(x) \geq 0, \forall x, \quad c(p) = p^r r \log p I_{(0,\infty)}(p) \\ &w(p) = \log(1-p) I_{(-\infty,1)}(p), \quad t(x) = x \end{aligned}$$

Exercício 0.13 Uma v.a. X, com f.d.p. g, tem uma distribuição de localização-escala de parâmetros (λ, σ) (respectivamente, localização e escala) se e só se existir uma função f tal que

$$g(x|\lambda, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\lambda}{\sigma}).$$

Seja $Y = W(X) = \frac{X-\mu}{\sigma}$, de tal forma que $W^{-1}(y) = \lambda + \sigma y$. Então

$$\begin{aligned} g_Y(y|\lambda, \sigma) &= \left| \frac{d}{dy} W^{-1}(y) \right| g_X(W^{-1}(y)|\lambda, \sigma) \\ &= |\sigma| g_X(\lambda + \sigma y|\lambda, \sigma) \quad \sigma \\ &= \sigma \frac{1}{\sigma} f(\frac{\lambda + \sigma y - \lambda}{\sigma}) \quad \text{sse } X \text{ tem uma distribuição de localização e escala} \\ = f(y) \end{aligned}$$

que não depende de λ nem de σ.

Exercício 0.14 Para um dado $\sigma \in I\!R^+$, considere-se a família de f.d.p. $\{N(\mu, \sigma), \mu \in I\!R\}$. Tome-se $\mu_1 > \mu_2 \in I\!R$. Então as respectivas f.d. vêm relacionadas por:

$$P(X < x|\mu_1, \sigma) = \Phi(\frac{x-\mu_1}{\sigma}) \leq \Phi(\frac{x-\mu_2}{\sigma}) = P(X < x|\mu_2, \sigma), \quad \forall x \in I\!R$$

uma vez que a função de distribuição é uma função não decrescente no argumento, e $\exists x \in I\!R$: $P(X < x|\mu_1, \sigma) < P(X < x|\mu_2, \sigma)$, uma vez que os parâmetros de localização e escala definem biunivocamente a f.d. de uma normal.