Inferência e Decisão I

Exercícios Complementares

para

Tânia Marques e Silva

Exercício 4.1 Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória, e $\bar{X}$ e S^2 a média e variância amostral.

(a) Mostre que

$$S^2 = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} (X_i - X_j)^2$$

(b) Suponha que os X_i's têm quarto momento finito, e designe por $\theta_1 = E[X_i], \theta_j = E[(X_i - \theta_1)^j]$, $i = 1, \dots, n; j = 2, 3, 4$. Mostre que

$$Var(S^2) = \frac{1}{n}(\theta_4 - \frac{n-3}{n-1}\theta_2^2)$$

(c) Determine $Cov(\bar{X}, S^2)$ em função de $\theta_1, \dots, \theta_4$. Em que condições $Cov(\bar{X}, S^2) = 0$?

Exercício 4.2 Sejam U_i, $i = 1, 2, \dots, n$ v.a. i.i.d. com distribuição $Unif(0, 1)$; seja X uma v.a. com distribuição

$$P(X = x| \frac{c}{x!}, \quad x \in I\!N$$

com $c = \frac{1}{c-1}$. Finalmente considere

$$Z = \min\{U_1, \dots, U_X\}.$$

Determine a distribuição de Z.

Exercício 4.3 Um elevado número de indivíduos $N = mk$, são submetidos a um teste sanguíneo. O teste pode ser administrado de duas maneiras:

(i) Cada indivíduo é testado separadamente, sendo pois necessário efectuar N testes;

(ii) O sangue de k indivíduos é misturado e analisado em conjunto. Se o teste é negativo, então estes k indivíduos não tornam a ser testados (sendo pois o teste conclusivo para os k indivíduos); pelo contrário, se o teste for positivo, os sangues terão de ser analisados individualmente. Neste caso terão sido necessários $k + 1$ testes para analisar k indivíduos.

Assume que a probabilidade do teste dar positivo num indivíduo é p, constante de indivíduo para indivíduo, sendo sabido que os resultados dos testes são independentes entre indivíduos.

(a) Determine a probabilidade do teste feito sobre o sangue misturado de k indivíduos ser positivo.

(b) Seja X a v.a. que contabiliza o número de testes feitos aos N indivíduos sob o procedimento (ii). Determine $E[X]$.

(c) Escolha o procedimento óptimo em função de p, para um critério que lhe pareça razoável.

Exercício 4.4 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma família de localização, e seja M a mediana amostral. Prove que $M - \bar{X}$ é uma estatística ancilar.

Exercício 4.5 Seja $f(x, y|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ a f.d.p. uniforme bivariada para o rectângulo com vértice inferior esquerdo $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ e vértice superior direito $(\theta_3, \theta_4) \in \mathbb{R}^2$. Assuma que $\theta_1 < \theta_3$ e que $\theta_2 < \theta_4$. Determine uma estatística suficiente para $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Exercício 4.6 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. proveniente do modelo $\mathcal{F} = \{Unif(\theta, \theta + 1), \theta \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determine uma estatística suficiente mínima.

(b) Mostre que $T(\underline{X}) = X_{(n)} - X_{(1)}$ é uma estatística ancilar.

(c) Prove que para uma família de localização a estatística $T(\underline{X})$ é sempre uma estatística ancilar.