Inferência e Decisão I

2003/04

LMAC

Enunciado do 2º trabalho

Exercício 2.1 Sejam $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória proveniente de uma população $N(0, \sigma_X^2)$ e $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ outra amostra aleatória proveniente de uma população $N(0, \sigma_Y^2)$, independente da primeira. Considere $\lambda = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$.

(a) Determine um teste da razão de verosimilhanças de nível α para testar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.

(b) Exprima a região de rejeição do teste anterior em termos de uma v.a. com distribuição F-Snedcor.

(c) Determine um intervalo aleatório de confiança $1 - \alpha$ para λ.

Exercício 2.2 Seja $X \sim N(\theta, a\theta)$, com θ e a desconhecidos e $\underline{X}$ uma amostra aleatória de X, de dimensão n.

(a) Determine uma região de confiança para a por inversão da região de aceitação do teste de razão de verosimilhanças correspondente às hipóteses $H_0 : a = a_0$ vs $H_1 : a \neq a_0$.

(b) Construa uma região de confiança para a de precisão uniformemente mínima.

(c) Suponha agora que $X \sim N(\theta, a\theta^2)$. Responda às mesmas questões mas agora para esta distribuição.

Exercício 2.3 Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma poopulação $N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Nesta alínea admita que $\mu = \sigma$, sendo σ desconhecido. Determine uma variável fulcral e deduza um intervalo aleatório de confiança $1 - \alpha$ para σ.

(b) Suponha que tanto μ como σ são desconhecidos (mas não necessariamente iguais), e que se pretende construir regiões de confiança para μ e σ.

(b.i) Prove a seguinte desigualdade:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

Esta desigualdade é um caso particular da *desigualdade de Bonferroni.*

(b.ii) Considere os dois intervalos aleatórios:

$$\{\mu : \bar{X} - \frac{kS_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{kS_{n-1}}{\sqrt{n}}\} \quad \{\sigma^2 : \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{a}\}$$

Determine a, b e k de forma que consiga obter uma região aleatória para (μ, σ^2) de confiança $1 - \alpha$.

(b.iii) Responda à mesma questão supondo agora que o primeiro intervalo é da forma

$$\{\mu : \bar{X} - \frac{kS_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{kS_{n-1}}{\sqrt{n}}\}$$

(b.iv) Teça os comentários que achar apropriados sobre a comparação das regiões encontradas nas duas alíneas anteriores.

(c) Suponha nesta alínea que σ é conhecido. Determine o menor valor de n que garante que um intervalo para μ de confiança 0.95 tenha amplitude inferior a $\frac{\sigma}{4}$.

(d) Responda à questão anterior assumindo que σ não é conhecido.

(e) Supondo ainda que σ é desconhecido, mostre que o intervalo

$$\{\mu : \mu \leq \bar{X} + F_{t_{n-1}}^{-1}(1-\alpha)\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\}$$

pode ser obtido por inversão de uma região de aceitação de um teste obtido por razão das verosimilhanças. Prove ainda que este intervalo é UMA. Será que consegue determinar um intervalo aleatório para μ de confiança $1 - \alpha$ UMA centrado?

Exercício 2.4 Seja θ o valor esperado de duas populações normais independentes. Suponhamos que pretendemos testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad \theta > \theta_0$$

Seja agora X uma v.a. que resulta da mistura de duas normais independentes. Assim

$$X \sim \begin{cases} N(\theta, 100) & \text{com probabilidade } p \\ N(\theta, 1) & \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

(a) Mostre que o teste para o qual a região de rejeição de H_0 é dada por $X > \theta_0 + \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\sigma$, com $\sigma = 1$ ou $\sigma = 100$ dependente da população amostrada é um teste de nível α.

(b) Determine um intervalo aleatório para θ de confiança $1 - \alpha$.

(c) Mostre que o teste para o qual a região de rejeição é dada a seguir é mais potente que o teste anterior:

$$\text{rejeitar } H_0 \Leftrightarrow \begin{cases} X > \theta_0 + \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha-p}{1-p}) & \sigma = 1 \\ \text{sempre} & \sigma = 100 \end{cases}$$

onde $\alpha > p$.

(d) Determine uma região aleatório para θ de confiança $1-\alpha$, invertendo a região de aceitação correspondente ao teste da alínea anterior. Mostre que esta região aleatória é vazia com probabilidade positiva. Comente.

Exercício 2.5 Considere novamente uma população $N(\mu, \sigma^2)$, com ambos os parâmetros desconhecidos. Neste exercício pede-se para derivar intervalos aleatórios para σ^2 da forma

$$\{\sigma^2 : \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{a}\}$$

para a e b devidamente escolhidos.

Para tal seja $f_p(t)$ a f.d.p. de uma variável χ_p^2. Assumimos que a e b têm de ser tais que

$$\int_a^b f_{n-1}(t)dt = 1 - \alpha$$

Para cada uma das situações que se seguem, aponte mais outra restrição para a e b de forma a que a e b sejam calculáveis.

(a) Inversão da região de aceitação de um teste de razão de verosimilhanças de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

(b) De entre os intervalos da alínea anterior, os que tiverem menor amplitude.

(c) De entre os intervalos da primeira alínea os que forem centrados e que tiverem menor probabilidade de falsa cobertura.

(d) Prove que o intervalo aleatório para σ^2 usualmente derivado nas cadeiras anteriores é da forma referida na primeira alínea, mas assumindo a restrição de que as caudas devem ter igual área.

Exercício 2.6 (a) Prove e interprete a seguinte relação:

$$\sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (n-x) \binom{n}{x} \int_0^{1-p} t^{n-x-a} (1-t)^x dt$$

para $x \in \{0, \ldots, n\}$.

(b) Seja $X \sim F_{p,q}$. Derive o valor esperado e variância de X.

(c) Prove que $\frac{1}{X} \sim F_{q,p}$.

(d) Prove que $\frac{\frac{p}{q}X}{1+\frac{p}{q}X} \sim Beta(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$.

(e) Suponha agora que $Z \sim Binomial(m, p)$ e que $\underline{Z}$ é uma amostra aleatória de Z de dimensão n.

(e.i) Determine uma estatística suficiente T para p (assumindo que m é conhecido). Identifique a distribuição de T e verifique se é estocasticamente crescente ou decrescente.

(e.ii) Utilizando todos os resultados provados nas alíneas anteriores, prove que um intervalo aleatório para p baseado numa única observação de Z de confiança $1-\alpha$ é dado por

$$C(Z)=\{p: \frac{1}{1+\frac{m-Z+1}{Z}F^{-1}_{F_{2(m-Z+1),2Z}}(1-\alpha/2)} \leq p \leq \frac{1}{1+\frac{Z+1}{m-Z}F^{-1}_{F_{2(Z+1),2(m-Z)}}(\alpha/2)}\}$$

com $F^{-1}_{F_{2(m-Z+1),2Z}}(1-\alpha/2)=0$ se $Z=0$ e $F^{-1}_{F_{2(m-Z+1),2Z}}(\alpha/2)=1$ se $Z=m$.