INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Inferência e Decisão I

2003/04

LMAC

Enunciado do 1º trabalho

Grupo I - **Testes Invariantes**

O princípio da invariância, já mencionado no capítulo 2 (a propósito de estratégias de redução de dimensionalidade dos dados) desempenha um papel importante nos procedimentos inferenciais, não sendo pois de estranhar que no domínio dos testes de hipóteses os *testes invariantes* (para determinado conjunto de transformações) tenham propriedades interessantes, não só do ponto de vista teórico como prático.

Defina um teste invariante para uma transformação, discutindo considerações associadas à invariância. Em particular deve dar uma visão unificada do princípio da invariância na redução de dimensionalidade dos dados, na determinação de estimadores e na construção de testes de hipóteses. Discuta ainda quais os grupos de transformações mais relevantes e a que nível.

Nota: para responder a esta questão é necessário consultar livros (em particular os que estiverem indicados na bibliografia da cadeira) e, eventualmente, pesquisar textos existentes na Net. A avaliação desta questão levará em linha de conta a clareza da exposição, a capacidade de dar uma visão unificadora ao próprio princípio da invariância, a ilustração através de exemplos. As referências bibliográficas utilizadas deverão ser indicadas.

Grupo II - **Testes UMP invariantes**

Exercício 1 - Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma população com f.d.p. f, onde f pertence a uma família de localização, e suponhamos que f só pode ser igual a uma de duas f.d.p. $f_i(x-\theta)$, com $i = 0, 1$.

Admita que se pretende testar

$$H_0 : f(x-\theta) = f_0(x-\theta) \quad \text{vs} \quad H_1 : f(x-\theta) = f_1(x-\theta)$$

usando um teste que é invariante para o seguinte grupo de transformações:

$$g_a(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a, \ldots, x_n + a)$$

onde $a \in I\!R$.

(a) Mostre que este teste de hipóteses é invariante para a transformação considerada.

(b) Mostre que um teste invariante é função da amostra $(X_1, \ldots, X_n)$ apenas através das diferenças $(X_1 - X_n, \ldots, X_{n-1} - X_n)$.

(c) Seja $\underline{Y} = (X_1 - X_n, \ldots, X_{n-1} - X_n)$. Mostre que se H_i for verdadeiro (com $i = 0, 1$) então $\underline{Y}$ tem f.d.p.

$$g_i(\underline{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} f_i(x_j + t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-1} f_i(y_j + t) f_i(t)dt$$

independente de θ. Faça as considerações que entender sobre este resultado.

(d) Use o lema de Neyman-Pearson para determinar a forma genérica de um teste UMP para testar H_0 vs H_1.

(e) Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória proveniente de uma população $Unif(\theta, \theta + \lambda)$, determine o teste UMP invariante para testar $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

(f) Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória proveniente de uma população $N(\theta, \sigma^2)$, determine o teste UMP invariante para testar $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$ vs $H_1 : \sigma > \sigma_0$. Compare este teste com o teste construído com base na razão de verosimilhanças.

Exercício 2 - Para cada uma das situações que se segue, determine um teste invariante e, quando possível, determine um teste UMP invariante. Compare com o teste baseado na razão de verosimilhanças.

(a) $X_1, \ldots, X_n$ é uma a.a. proveniente de uma população $N(\mu, \sigma^2)$, com ambos desconhecidos. Pretende-se testar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ usando um teste que seja invariante sob o seguinte grupo de transformações:

$$g_c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n)$$

com $c \in I\!R^+$.

(b) $X_1, \ldots, X_n$ é uma a.a. proveniente de uma população duplamente exponencial de parâmetros θ (localização) e λ (escala), com ambos desconhecidos. Pretende-se testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ usando um teste que seja invariante sob o seguinte grupo de transformações:

$$g_c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n)$$

com $c \in I\!R^+$.

Exercício 2 - Procedendo de fórmula análoga ao primeiro exercício deste grupo, formule genericamente um teste invariante para o grupo de transformações de escala $g_c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n)$ e determine o teste UMP.