



Inferência e Decisão I

2003/04

LMAC

Enunciado do 1º trabalho

Grupo I - Testes Aleatorizados e testes admissíveis

Descreva o que se entende usualmente por função de teste e, em particular, exprima a função potência de teste e o tamanho do teste como operadores da função de teste.

Defina um teste aleatorizado e discuta o seu papel na inferência estatística, nomeadamente quando se trabalha no domínio de distribuições discretas.

Finalmente discuta a admissibilidade dos testes de hipóteses (em inglês: *admissible tests*)

Nota: para responder a esta questão é necessário consultar livros (em particular os que estiverem indicados na bibliografia da cadeira) e, eventualmente, pesquisar textos existentes na Net (as palavras chave da pesquisa deverão ser em inglês). A avaliação desta questão levará em linha de conta a clareza da exposição e a ilustração através de exemplos. As referências bibliográficas utilizadas deverão ser indicadas.

Grupo II - Testes aleatorizados, admissíveis e potência de teste

Exercício 1 - Sejam X_1 e X_2 duas v.a. i.i.d., provenientes de uma população $Poi(\lambda)$, e suponha que se pretende testar $H_0 : \lambda \leq 1$ vs $H_1 : \lambda > 1$. Considere a seguinte função de teste:

$$\phi(X_1) = \begin{cases} 1 & X_1 \geq 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

- Mostre que $\phi(X_1)$ tem tamanho 0.26.
- Derive a função de teste $E[\phi(X_1)|X_1 + X_2]$ e mostre que tem igualmente tamanho 0.26.
- Represente graficamente as funções potência de $\phi(X_1)$ e de $E[\phi(X_1)|X_1 + X_2]$.

(d) Considere um terceiro teste, para o qual a sua função teste é dada por

$$\phi'(X_1 + X_2) = \begin{cases} 1 & X_1 + X_2 > 3 \\ 0.65 & X_1 + X_2 = 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Que tipo de função teste é $\phi'(\cdot)$? Mostre que ϕ' tem também tamanho 0.26 mas que ϕ' é um teste mais potente que $\phi(X_1)$ e que $E[\phi(X_1)|X_1 + X_2]$.

Exercício 2 - Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória proveniente de uma população $Bernoulli(\theta)$, com $\theta \in (0, 1)$.

(a) Mostre que o teste

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n X_i > k \\ \gamma & \sum_{i=1}^n X_i = k \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

é um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Indique o tamanho α deste teste.

(b) Suponha que $n = 4$, $k = 3$ e que $\gamma = 0.144$. Determine o teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq 0.3$ vs $H_1 : \theta > 0.3$, indicando o seu tamanho e a potência para $\theta = 0.6$.

(c) Considere agora os dois testes não-aleatorizados cujas funções de teste são dadas por

$$\phi_1\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^4 X_i \geq 3 \\ 0 & c.c. \end{cases} \quad \phi_2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^4 X_i > 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Calcule para estes dois testes o seu tamanho e a potência em $\theta = 0.6$. Considere que algum destes testes é uma alternativa razoável ao teste cuja função de teste é ϕ ?

Exercício 3 - Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória proveniente de uma população $Unif(0, \theta)$.

(a) Determine o teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.

(b) Mostre que o teste para o qual a função de teste, ϕ , baseada na estatística suficiente $T(\underline{X}) = X_{(n)}$, é dada por

$$\phi(T) = \begin{cases} 1 & t > \theta_0 \\ \alpha & t \leq \theta_0 \end{cases}$$

é um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Comente este teste.

(c) Combinando as alíneas anteriores, determine um teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Exercício 4 - Pretende-se testar $H_0 : \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 0.5$ vs a hipótese alternativa bilateral baseado numa única observação de uma população discreta X com função de probabilidade

$$P(X = x|\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \theta_1(1 - \theta_2) & x = -2 \\ (0.5 - \alpha) \frac{1-\theta_1}{1-\alpha} & x = -1 \\ \alpha \frac{1-\theta_1}{1-\alpha} & x = 0 \\ (0.5 - \alpha) \frac{1-\theta_1}{1-\alpha} & x = 1 \\ \theta_1\theta_2 & x = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

com $0 \leq \theta_1 \leq \alpha > 0.5$ e $\alpha > 0$ conhecido.

- Determine a região crítica fornecida pelo teste da razão de verossimilhanças para um teste de tamanho α .
- Determine a função potência do teste.
- O teste é admissível? Determine um teste UMP para este problema.

Exercício 5- Considere uma v.a. $X = (N, Y)$, com f.d.p. pertencente à família \mathcal{P}_θ , onde $\theta = (p, \mu) \in (0, 1) \times \mathbb{R}$. Suponha adicionalmente que $N \sim \text{Geométrica}(p)$ e que $Y|N = n \sim N(\mu, \frac{1}{n})$. Suponha que pretende testar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ com base nas observações X_1, \dots, X_n , de forma que p é um parâmetro perturbador. Determine um teste UMPU de tamanho $\alpha = 0.1$.

Exercício 6 - Prove e comente o seguinte resultado, relacionando-o, em particular, com o teorema de Rao-Blackwell.

Teorema 1 *Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população com f.d.p. $f(\cdot|\theta)$, onde $\theta \in \Theta$ é um parâmetro desconhecido. Seja ainda $T = T(\underline{X})$ uma estatística suficiente para θ . Para qualquer função de teste $\phi(\underline{X})$ existe uma outra função de teste - eventualmente aleatória - $\phi'(T)$ (i.e. é uma função de teste função da amostra apenas através da estatística suficiente T) para a qual*

$$E[\phi'(T)|\theta] = E[\phi(\underline{X})|\theta]$$

O que pode dizer acerca das probabilidades de erro associadas a cada um dos testes?