1º TESTE PE (3/11/2009)

Grupo I

1. Acontecimentos:

F_i = "filho i é do sexo feminino"

$M_i \equiv \overline{F_i}$ = "filho i é do sexo masculino"

$p(M_1) = 0.5 \Rightarrow p(F_1) = 0.5$

$p(M_2|M_1) = 0.57 \Rightarrow p(F_2|M_1) = 0.43$

$p(F_2|F_1) = 0.55 \Rightarrow p(M_2|F_1) = 0.45$

a) $p(M_1 \cap M_2) = p(M_1)\,p(M_2|M_1) = 0.5 \times 0.57 = 0.285$ //

$p(F_1 \cap F_2) = p(F_1)\,p(F_2|F_1) = 0.5 \times 0.55 = 0.275$ //

b) $$p(M_1|F_2) = \frac{p(M_1 \cap F_2)}{p(F_2)} = \frac{p(M_1)\,p(F_2|M_1)}{p(M_1)p(F_2|M_1) + p(F_1)p(F_2|F_1)} =$$

$$= \frac{0.5 \times 0.43}{0.5 \times 0.43 + 0.5 \times 0.55} = \frac{0.43}{0.43 + 0.55} = 0.4388$$ //

c) Seja $X \rightarrow$ nº de casais com os dois primeiros filhos do sexo feminino, em 20 casais.

Considerando que, em casais diferentes, os sexos dos filhos são independentes,

$X \sim \text{Binomial}(n=20,\ p=0.275)$

onde $p = p(\text{"sucesso"}) = p(F_1 \cap F_2) = 0.275$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X<2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{20}{k} 0.275^{k}\, 0.725^{20-k} =$$

$$= 1 - 0.0138 = 0.9862$$ //

2. Seja $X_t \rightarrow$ nº de trabalhos recebidos de um terminal no período de tempo t (em minutos)

$X_t \sim \text{Poi}(\alpha t = 4t)$

α ↑ nº médio de trabalhos por minuto

a) $t = 30$ seg $= 0.5$ minuto

$X_{0.5} \sim \text{Poi}(2)$

$$p(X_{0.5} \geq 2) = 1 - p(X_{0.5} < 2) = 1 - p(X_{0.5} \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{2^k}{k!} e^{-2} =$$

ou, tabelas da Poisson

$$= 1 - F_{X_{0.5}}(1) = 1 - 0.4060 = 0.594$$ //

$\boxed{\lambda = 2,\ k = 1}$

b) Seja $T \rightarrow$ tempo (em minutos) entre a recepção de dois trabalhos consecutivos

$T \sim \text{Exp}(\alpha = 4)$

$$p(T > 0.5) = \int_{0.5}^{+\infty} 4e^{-4t}\,dt = \left[-e^{-4t}\right]_{0.5}^{+\infty} = e^{-2} = 0.1353$$ //

$E(T) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{4}$ minutos $= 15$ segundos //

Grupo II

1. A f.p. conjunta de (X,Y) é

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=x_i)$
0	0.7	0	0.7
1	0	0.2	0.2
2	0.1	0	0.1
$P(Y=y_j)$	0.8	0.2	

a) $E(X|Y=0) = \sum_x x\, p(X=x|Y=0) = 0\times\frac{7}{8} + 2\times\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$E(X^2|Y=0) = \sum_x x^2\, p(X=x|Y=0) = 0^2\times\frac{7}{8} + 2^2\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$V(X|Y=0) = E(X^2|Y=0) - E^2(X|Y=0) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

onde, a f.p. condicional de X dado $Y=0$ é

$$p(X=x|Y=0) = \frac{p(X=x, Y=0)}{p(Y=0)} = \begin{cases} \frac{7}{8}, & x=0 \\ \frac{1}{8}, & x=2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

b) O coeficiente de correlação é:

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}\sqrt{E(Y^2)-E^2(Y)}} = \frac{0.12}{\sqrt{0.44}\sqrt{0.16}} = 0.45$$

cálculos auxiliares:

$E(X) = \sum_x x\, p(X=x) = 0\times0.7 + 1\times0.2 + 2\times0.1 = 0.4$

$E(X^2) = \sum_x x^2 p(X=x) = 0^2\times0.7 + \dots = 0.6$

$E(Y) = \sum_y y\, p(Y=y) = 0\times0.8 + 1\times0.2 = 0.2$

$E(Y^2) = \sum_y y^2 p(Y=y) = 0^2\times0.8 + 1^2\times0.2 = 0.2$

Nota: $Y \sim Ber(p=0.2)$, logo $\begin{cases} E(Y) = p = 0.2 \\ V(Y) = p(1-p) = 0.16 \end{cases}$

$E(XY) = \sum_x\sum_y xy\, p(X=x, Y=y) = 0\times0\times0.7 + 1\times1\times0.2 + 2\times0\times0.1 = 0.2$

Comentários

- Como $\rho_{X,Y} = 0.45 \neq 0$, conclui-se que as variáveis são dependentes.
- Como $\rho_{X,Y} = 0.451 > 0$, há tendência para que X e Y variem no mesmo sentido
- Como $\rho_{X,Y} = 0.45$ não está próximo de 1, o grau de linearidade é moderado. Notar que, se não houvesse substituições, as variáveis teriam $\rho_{X,Y} = 1$.

2. Seja X → quantidade de comida (em kg) consumida por cliente

$X_H \sim N(0.5, 0.125^2)$ $\qquad X_H \perp X_M$

$X_M \sim N(0.4, 0.1^2)$

$P(H) = 0.4$

$P(M) = 0.6$

a) $P(X<0.6) \overset{\text{Pela Lei da Probabilidade Total}}{=} P(H)\,P(X<0.6|H) + P(M)\,P(X<0.6|M)$

$= 0.4\times\Phi\left(\frac{0.6-0.5}{0.125}\right) + 0.6\,\Phi\left(\frac{0.6-0.4}{0.1}\right)$

$= 0.4\times\Phi(0.8) + 0.6\times\Phi(2)$

$= 0.4\times0.7881 + 0.6\times0.9772 = 0.90156$

b) Seja $T = \sum_{i=1}^{6} X_{i,M} + \sum_{i=1}^{4} X_{i,H}$

Como T é uma soma de variáveis aleatórias normais e independentes ainda tem distribuição Normal.

$$E(T) = \sum_{i=1}^{6} E(X_{i,A}) + \sum_{i=1}^{4} E(X_{i,B}) = 6 \times 0.4 + 4 \times 0.5 = 4.4 \text{ kg}$$

$$V(T) \underset{\substack{\uparrow \\ X_i \text{ indep}^{tes}}}{=} \sum_{i=1}^{6} V(X_{i,A}) + \sum_{i=1}^{4} V(X_{i,B}) = 6 \times 0.1^2 + 4 \times 0.125^2 = 0.1225 \text{ kg}^2$$

Logo, $T \sim N(4.4, 0.1225)$

$$P(T \leq 5) = \Phi\left(\frac{5 - 4.4}{\sqrt{0.1255}}\right) = \Phi(1.71) = 0.9564$$