Álgebra Linear - Exercícios dos minitestes

1. Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. Em função dos parâmetros reais α e β discutir a natureza do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & \alpha & \beta \end{array}\right]$$

   e determinar todas as soluções para o caso em que o sistema é indeterminado.

4. Calcular a inversa da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ tal que para algum inteiro positivo k se tem $A^k = \mathbf{0}$ onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula $n \times n$. Determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições :

   a) A matriz A é invertível.

   b) Seja I a matriz identidade $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A matriz $I - A$ pode não ser invertível.

   c) Seja B uma matriz $n \times n$ que não é invertível. A matriz $B - BA$ pode ser invertível.

   d) Seja G uma matriz $n \times n$ invertível. A matriz $I - G^{-1}AG$ é invertível.

6. Determinar uma base do espaço das colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Considerar a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Determinar:

   a) a característica de B
   b) a dimensão do espaço das linhas de B
   c) a dimensão do espaço das colunas de B
   d) a dimensão do núcleo de B

8. Considerar as seguintes matrizes 2×2:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$
$$K = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Determinar um subconjunto de $\{G, H, J, K, L\}$ que forme uma base para o subespaço das matrizes 2×2 gerado por estas matrizes.

9. Decidir se cada um dos seguintes conjuntos forma ou não um espaço vectorial e em caso afirmativo determinar a sua dimensão.

   a) Polinómios p de grau menor ou igual a três tais que $p(0) + p(1) = 0$
   b) Polinómios p de grau menor ou igual a três tais que $p(0) = p(1) = 0$
   c) Polinómios p de grau menor ou igual a três tais que $p(0)p(1) = 0$
   d) Matrizes A 2×2 tais que $A = A^t$
   e) Matrizes A 2×2 tais que $A = A^t \vee A = -A^t$

10. Calcular os determinantes das matrizes:

$$\text{a)} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 17 & 191 & \sqrt{2} \\ 0 & 21 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 37 & 1 & \pi^2 & 2 \\ 0 & 42 & 3 & -\mathrm{e} & 4 \end{bmatrix}$$

11. Seja F a matriz do problema anterior e seja G a matriz obtida de F trocando a primeira e a segunda linhas. Qual é o determinante de $F^{-1}G$? (Recordar que, se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então $\det(AB)=\det(A)\det(B)$).

12. Considerar o espaço $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Determinar uma base ortogonal do subespaço

$$L(\{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(2,1,0,-1)\}).$$

13. Calcular a distância do ponto $(-1,-1,-1)$ ao plano de equação Cartesiana $x+y-z-2=0$.

14. Para cada uma das seguintes matrizes, determinar os valores próprios e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{d)} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

15. Para cada uma das seguintes matrizes Hermiteanas, decidir se é definida positiva, definida negativa ou indefinida. *Sugestão:* Se parecer demasiado difícil calcular os valores próprios recorrer ao método dos menores principais para determinar se a matriz é definida positiva.

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} -6 & -3 & -4 \\ -3 & -5 & -7 \\ -4 & -7 & -10 \end{bmatrix}$ *Sugestão:* Comparar com a).

d) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$