Exercícios de Análise Matemática III
Fluxos, Teorema da Divergência e Teorema de Stokes

1. Calcular o fluxo do campo F através da superfície S segundo a normal indicada usando a definição.

   a) $F(x, y, z) = (1, 1, 0)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}$, normal com componente segundo z positiva.

   b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, S é o triângulo de vértices $(3, 0, 0)$,$(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 6)$, normal com componente segundo z positiva.

   c) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z > 0$, normal exterior.

   d) $F(x, y, z) = (-y, x, x^2)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ |z < 1|\}$, normal exterior.

   e) $F(x, y, z) = (2x, -y, 1 - z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$, normal com componente segundo z negativa.

   f) $F(x, y, z) = (2x, -y, 1-z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1-x^2-y^2,\ z > 0\}$, normal com componente segundo z positiva.

   g) $F(x, y, z) = (x, x^2, 3y - z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2,\ 1 < x < 4\}$, normal com componente segundo x negativa.

   h) $F(x, y, z) = (x, x^2, 3y - z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1,\ x = 1\}$, normal com componente segundo x negativa.

   i) $F(x, y, z) = (x, x^2, 3y - z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 16,\ x = 4\}$, normal com componente segundo x positiva.

2. Calcular o fluxo do campo F através da superfície S segundo a normal indicada, aplicando o Teorema da Divergência.

   a) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, S é o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 9$ com $-1 < z < 4$, normal no sentido do exterior do cilindro.

   b) $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x, y, 0)$, S é a porção do parabolóide de equação $z = 25 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$, normal exterior à região assim delimitada.

   c) $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(x, y, z)$, S é a esfera de raio 2 centrada na origem, normal exterior.

3. Calcular o fluxo do rotacional de F através da superfície S segundo a normal indicada, aplicando o Teorema de Stokes.

   a) $F(x, y, z) = (3y, -2x, xyz)$, S é o gráfico de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, normal com sentido ascendente em $(0, 0, 2)$.

   b) $F(x, y, z) = (2y, 3x, \mathrm{e}^z)$, S é a parte do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$, normal com sentido ascendente na origem.

4. Usar o Teorema de Stokes para calcular o integral de linha de F ao longo da curva C percorrida do modo indicado.

   a) $F(x, y, z) = (2z, x, 3y)$, C é a intersecção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = x$ percorrida uma vez no sentido directo quando observada de $(0, 0, 10)$.

   b) $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$, C é a intersecção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$ percorrida uma vez no sentido directo quando observada de $(0, 0, 10)$.

5. Considerar a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, -1 < z < 1\} .$$

   a) Calcular o fluxo do campo

$$F(x, y, z) = (x + \mathrm{e}^{y^2+z^2}, y + \operatorname{sen}(xz), 1 - z)$$

   através de S no sentido da normal unitŕia n que satisfaz $n(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 1, 0)$.

   b) Usar o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo $G(x, y, z) = (y, 2z, 1)$ através de S no mesmo sentido que acima.