

# Exercícios de ANÁLISE NUMÉRICA

2º Semestre 2002/2003

**Nota.** Em cada capítulo é apresentado, além dos exercícios básicos, a resolver nas aulas práticas, um conjunto de exercícios complementares. No final, a seguir ao capítulo VI, incluiu-se ainda uma lista de exercícios propostos em exames. Recomenda-se aos alunos que, depois de terem estudado a matéria, tentem resolver esses problemas fora das aulas e apresentem as suas dúvidas aos docentes, durante os horários de atendimento.

Estas folhas terminam com um formulário contendo as principais fórmulas e notações usadas.

## Capítulo I Teoria dos erros

### Notações

No que se segue,  $x$  designa um número real e  $\tilde{x}$  um valor aproximado de  $x$ ,  $x \simeq \tilde{x}$ .

$|e_x| = |x - \tilde{x}|$  é o *erro absoluto* de  $\tilde{x}$  em relação a  $x$ .

Seja  $\delta_x = \frac{x - \tilde{x}}{x}$  se  $x \neq 0$ , então

$|\delta_x|$  é o *erro relativo* de  $\tilde{x}$  em relação a  $x$ .

O valor  $100 |\delta_x|$ , em percentagem, representa a *percentagem de erro*

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente  $x$  em vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos
  - a)  $x = 1/6$
  - b)  $x = 1/3$
  - c)  $x = -83784$
  - d)  $x = -83785$
  - e)  $x = 83798$
  - f)  $x = 0.0013296$

### Cancelamento subtrativo

2. Deduza a seguinte fórmula para  $\delta_z$ , onde  $z = x - y$ , sendo  $x$  e  $y$  números reais

$$\delta_z = \frac{e_z}{z} = \frac{x}{x-y} \left( \frac{e_x}{x} \right) - \frac{y}{x-y} \left( \frac{e_y}{y} \right) = \frac{x}{x-y} \frac{e_x}{x} - \frac{y}{x-y} \frac{e_y}{y}$$

Conclua que o erro relativo de  $z$ ,  $|\delta_z|$ , pode ser muito grande, mesmo que o erro absoluto seja pequeno quando  $x$  e  $y$  são próximos. Como ilustração, considere os dois exercícios seguintes.

3. Considere os números  $x = \pi$  e  $y = 2199/700$ .
- a) Pretendem-se aproximações  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda  $\tilde{x} - \tilde{y}$ .
- b) Calcule os erros absolutos e relativos de  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  e de  $\tilde{x} - \tilde{y}$ , bem como as percentagens de erro. Comente.
- c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa os números  $x$  e  $y$ . Determine  $fl(fl(x) - fl(y))$  e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?
4. Na equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , admita-se que os coeficientes são todos positivos e exactos e que  $b^2 \gg ac$ . Como é sabido, as duas raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Faça  $a = 1$ ,  $b = 62.10$  e  $c = 1$ . A equação correspondente tem raízes  $x_1 \simeq -0.01610723$  e  $x_2 \simeq -62.08390$ . Usando aritmética de vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para  $x_1$  e  $x_2$ . Dê uma explicação para o mau valor que obteve para  $x_1$  e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

### Propagação dos erros no método de Gauss Estratégia de pesquisa de pivot

5. Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações:

$$(I) \begin{cases} 0.003000 x_1 + 59.14 x_2 = 59.17 \\ 5.291 x_1 - 6.130 x_2 = 46.78 \end{cases}$$

com solução exacta  $x_1 = 10.00$  e  $x_2 = 1.000$ . Suponha que efectua os cálculos no sistema VF(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, com e sem pesquisa parcial de pivot.

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

6. Tomaram-se para valores aproximados de  $N_1 = 0.3000 \times 10^1$ ,  $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$  e  $N_3 = 0.3000 \times 10^4$ , respectivamente os valores  $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$ ,  $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$  e  $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$ . Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.
7. Consideremos o sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss

- (a) sem pesquisa de pivot;
- (b) com pesquisa parcial de pivot.

Compare os resultados e comente.

8. Considere os dois seguintes sistemas de equações (equivalentes):

$$(I) \begin{cases} 0.00005x + y = 0.5 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x + 20000y = 10000 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Supondo que efectua os cálculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?

9. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (1)$$

- (a) Calcule  $f(10^{-6})$  utilizando a fórmula (1).
- (b) Obtenha uma aproximação de  $f(10^{-6})$ , utilizando o desenvolvimento de  $f$  em série de Taylor, em torno de  $x = 0$ .
- (c) Sabendo que  $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ , calcule  $f(10^{-6})$  utilizando uma nova fórmula para  $f$ .
- (d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

# Capítulo I I

## Métodos iterativos para equações não lineares

1. Considere a equação  $\sin x - e^{-x} = 0$ .
  - (a) Prove que esta equação tem uma raiz  $z \in [0.5, 0.7]$ .
  - (b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha  $z$ .
  - (c) Determine o número  $m$  de iterações necessárias para garantir  $|z - x_m| < 10^{-6}$ .
2. Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0 \quad (2)$$

- (a) Localize graficamente as raízes da equação (2) e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.
- (b) Considere a seguintes sucessões

$$(S1) \quad x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}} \quad (S2) \quad x_{m+1} = \ln(3x_m^2)$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação 2 usando, para cada raiz, uma dessas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial  $x_0$ .

- (c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com  $x_0 = 1$ . Estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.
  - (d) Será possível usar a sucessão (S1) para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão (S2) para aproximar a menor raiz positiva da equação?
3. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$z_0 = 1, \quad z_{k+1} = 1 - \frac{1}{bz_k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

onde  $b$  é um número real dado.

- (a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se  $b > 4$  esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$
- (b) Seja  $b = \frac{25}{4}$ . Através da definição de ponto fixo, calcule  $z = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ .
- (c) Para esse valor de  $b$ , mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo  $[\frac{4}{5}, 1]$  e que se verifica

$$|z_{k+1} - z| \leq \frac{4}{75} \left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(TESTE 16.12.95)

4. Seja a função

$$g(x) = \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1)$$

(a) Prove que a sucessão definida por

$$x_{m+1} = \frac{1}{3} \ln(x_m^2 + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

converge para um número  $z \in [-1, 1]$ . Determine  $z$  e a ordem de convergência.

(b) Efectue algumas iterações, começando com  $x_0 = 5$ , e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \dots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior ?

5. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

(a) Mostre que se  $x_0$  for escolhido no intervalo  $[2.6, 3]$ , estão asseguradas as condições de convergência do método.

(b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações).  
(EXAME 18.01.93)

6. Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de  $\sqrt{10}$ :

(a) método de Newton aplicado à função  $f(x) = x^2 - 10$ . Mostre que se escolher  $x_0 = 4^*$  então o método de Newton converge e a ordem é dois. Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de  $x_3$ . Quantos algarismos significativos pode garantir ? (\* Note que pode concluir convergência se escolher para  $x_0$  qualquer valor  $\geq 4$ )

(b) método de Newton aplicado à função  $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$ . Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.

7. Mostre que a equação

$$\ln x - (x - 2)^2 = 0$$

tem 2 e só 2 raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial:  $x_0 = 2.1$ ,  $x_0 = 2.5$  ou  $x_0 = 1.4$  ? Mostre que para o  $x_0$  que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

8. Considere a equação

$$f(x) = x \tan(x) - 1 = 0,$$

Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo  $[0.8, 0.9]$ . Determine um majorante do erro do resultado obtido.

9. A equação  $x^2 = a$ , com  $a > 0$ , pode escrever-se sob a forma  $x = g(x)$ , onde  $g(x) = \frac{a}{x}$ . Considere o método do ponto fixo para aproximar a raiz positiva da equação. Mostre que o método é divergente qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \neq \sqrt{a}$ .

### EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

10. Considere de novo a equação  $3x^2 - e^x = 0$  considerada no exercício 2. Determine uma função iteradora  $g(x)$  tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

11. Considere a função de variável real

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}$$

- (a) Sendo  $\{x_m\}$  a sucessão numérica definida por  $x_{m+1} = g(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , mostre que esta sucessão tem um limite finito  $z \in [0, 1]$ , qualquer que seja  $x_0 \in [0, 1]$ .
- (b) Verifique que a função  $g$  tem um (único) ponto fixo no intervalo  $[2, 3]$ . Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora  $g$  ?  
(EXAME 18.01.93)

12. Pretende-se determinar uma raiz da equação  $x = \phi(x)$  pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a  $0.5 \times 10^{-4}$ . Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \qquad x_5 = 0.43814$$

Sabendo que  $|\phi'(x)| \leq 0.4$ , determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

(EXAME 10.01.93)

13. Para calcular a raiz quadrada do número  $a > 0$  recorre-se frequentemente ao seguinte método iterativo

$$x_{m+1} = \frac{1}{2} \left( x_m + \frac{a}{x_m} \right), \qquad m = 0, 1, \dots$$

- (a) Verifique que esta fórmula corresponde à utilização do método de Newton para resolver o problema.

(b) Mostre que o erro do método satisfaz a condição

$$e_{m+1} = -\frac{e_m^2}{2x_m},$$

onde  $e_{m+1} = z - x_{m+1}$ .

14. Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real  $a$ , pretende-se utilizar o método da secante.

(a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de  $a$  arbitrário.

(b) Considere o caso de  $a = 2$ . Tomando como aproximações iniciais  $x_0 = 1, x_1 = 2$ , verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

15. Sabendo que  $h(x)$  e  $h'(x)$  são crescentes, diferenciáveis, e que  $h$  tem uma raiz no intervalo  $I = [-1, 1]$ , pretende-se determinar a raiz da equação

$$F(x) = x + h(x) = 0$$

usando o seguinte método

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

Verifique que  $F$  tem uma raiz única em  $I$  e que existem valores  $a, b \in I$  para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

(Exame 22.07.96)

16. (a) Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \quad (\text{E})$$

e prove que ela tem apenas três raízes reais:  $z_1 < z_2 < z_3$ , tal que  $z_1 \in [-1, 0]$ ,  $z_2 \in [0, 1]$  e  $z_3 \in [4, 5]$ .

(b) Para aproximar as raízes positivas da equação (E), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{(x/2)}$$

i. Mostre que  $z_2$  e  $z_3$  são pontos fixos de  $g$ .

ii. Mostre que o método iterativo associado a  $g$  converge para  $z_2$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [0, 1]$ .

iii. Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz  $z_3 \in [4, 5]$ .

(EXAME de 28.07.97)

17. Considere o método de Newton para aproximar a raiz  $z_3 \in [4, 5]$  de (E).

- (a) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [4.1, 4.4]$ . Determine ainda a **ordem de convergência** do método.
- (b) Partindo de  $x_0 = 4.1$ , calcule  $x_1$ .  
Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para  $|z_3 - x_2|$ .  
(EXAME de 28.07.97)

## Capítulo III

### Sistemas de equações

#### III.1 - Condicionamento de sistemas lineares

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e considere o sistema  $Ax = b$ , com  $b = [1 \ 10^{-6}]^T$ , que tem por solução exacta  $x = [1 \ 1]^T$ .

- (a) Determine  $\text{cond}(A)$  na norma  $\|\cdot\|_\infty$ .
- (b) Considere o sistema  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ , onde  $\tilde{b} = [1 + \epsilon, \ 10^{-6}]^T$ . Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \quad \text{e} \quad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

Comente.

- (c) Considere ainda o sistema  $A\bar{x} = \bar{b}$ , onde  $\bar{b} = [1, \ 2 \times 10^{-6}]^T$ . Obtenha  $\|\delta_b\|_\infty$  e  $\|\delta_x\|_\infty$ . Comente.

2. Seja  $A$  a matriz do problema 8 (I) do capítulo I:

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine o número de condição da matriz  $A$  na norma  $\|\cdot\|_1$ ;
- (b) Ao resolver um sistema com a matriz  $A$ , sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz  $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$ , determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

3. Seja  $A$  a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde  $a \in \mathbf{R}$ . Suponhamos que, ao resolver o sistema  $Ax = b$ , com um certo valor de  $a$ , se obteve a solução  $\tilde{x} = (1, 1, 1)$ . Supondo que o valor de  $a$  está afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a  $\epsilon$ , determine um majorante de  $\|\Delta x\|_\infty$ , onde  $\Delta x$  é a diferença entre a solução obtida e a que se obteria se fosse conhecido o valor exacto de  $a$ .

4. Seja  $A$  uma matriz quadrada, de dimensão  $n$ , com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule  $A^{-1}$ .

(b) Determine os números de condição  $cond_1(A)$  e  $cond_\infty(A)$ .

(c) Sejam  $b_1$  e  $b_2$  dois vectores de  $\mathbf{R}^n$  tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

Sejam  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, as soluções dos sistemas  $Ax = b_1$  e  $Ax = b_2$ . Determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de  $n = 20$ . Comente.

### III.2 - Métodos iterativos para sistemas lineares

1. O sistema de equações lineares,  $Ax = b$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w & a \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & \omega a \\ 0 & 1 - \omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b}$$

- (a) Para que valores de  $a$  o método converge se  $\omega = 1$  ?  
 (b) se  $a = -1/2$  e  $\omega = 1/2$  o método converge ?
2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

- (a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.  
 (b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4 iterada. Considere  $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$ .  
 (c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < 10^{-2}$ . Conclua sobre o erro da iterada  $\mathbf{x}^{(k)}$ .
3. Considere um sistema de duas equações na forma geral:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

- (a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  se e só se  $|m| < 1$ , onde  $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$ .  
 (b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante, por linhas, se verifica

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_{\infty} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}$$

onde  $\mathbf{x}$  é a solução do sistema,  $\mathbf{x}^{(k)}$  é a k-ésima iterada e  $\alpha = \max\left(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$ .

- (c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = [2, 1]^T$ . Com base na alínea (b), determine um majorante do erro do resultado obtido.

- (d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_{\infty} < 0.001$  ?
4. Pretende-se resolver um certo sistema  $Ax = b$ , onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

- (a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações. Justifique e diga quantas.
- (b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

### EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

5. Considere o sistema  $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

- (a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.
- (b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ .

6. Considere o seguinte sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$$

Identifique a matriz  $B$  e o vector  $C$ . Se  $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$  estime a norma do erro de  $x^{(n)}$ .

7. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z & = 2 \\ -x + y & = 0 \\ x + 2y - 3z & = 0 \end{cases}.$$

- (a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.
- (b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial  $x^{(0)}$  (diferente da solução exacta), tal que a sucessão  $\{x^{(k)}\}$  seja convergente; e uma aproximação inicial  $\tilde{x}^{(0)}$ , partindo da qual o método diverja.

### III.3 Métodos iterativos para sistemas não-Lineares

1. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) = 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = [3 \ 2 \ 1]^T$ .

- (a) Mostre que o sistema linear  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$  a ser resolvido para se obter  $\mathbf{x}^{(1)}$  é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha ainda o vector  $\mathbf{b}$ .

- (b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss com **pesquisa parcial de pivot**, e obtenha  $\mathbf{x}^{(1)}$ .

(EXAME 28.07.97)

### EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

2. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) Tomando como aproximação inicial  $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$ , ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?
- (b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

(EXAME 09.07.92)

3. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{cases}$$

onde  $\mu$  é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial

o vector  $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$ , onde  $c$  é um certo número real, para obter a aproximação  $\mathbf{x}^{(1)}$  somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

- Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.
- Factorize a matriz pelo método de Doolittle e diga para que valores de  $c$  o sistema linear considerado tem solução única.
- No caso de  $c = 1$ , resolva o sistema pelo método de Doolittle e calcule  $\mathbf{x}^{(1)}$  (primeira iterada do método de Newton).
- No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de  $c$  está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

## Capítulo IV

### Aproximação de funções

#### IV.1 - Interpolação

- Na tabela seguinte são apresentados valores (exactos) da função

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$x$	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

- Obtenha a expressão do polinómio interpolador de  $f$  nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.
  - Idem, mas através da fórmula de Newton.
  - Calcule o valor interpolado para  $x = 1.3$ . Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.
- Considere a seguinte tabela de valores:

$x_i$	-3	-1	1	3
$f_i$	-33	14	-2	-5

- (a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em  $[-1, 3]$ , determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo  $[-1, 1]$ , utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.
- (b) Obtenha o polinómio interpolador de  $f$  nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo  $[-1, 1]$ , obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.
- (c) Supondo que, para  $x \geq -1$ , a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que  $f[-1, 1, 2] = 4$ , escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter  $f(x)$ .

3. Considere a seguinte tabela de valores da função  $f(x) = \log_{10} x$ :

$x_i$	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

- (a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de  $f(2.4)$ .
- (b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar  $f(x)$ , pelo método utilizado na alínea anterior, quando  $x \in [2, 3]$ . Compare com o erro do resultado obtido para  $x = 2.4$ .
4. Pretende-se construir uma tabela de valores da função  $e^x$ , para  $x \in [0, 1]$ , com pontos igualmente espaçados  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , onde  $h$  é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau  $\leq 1$  nos pontos  $x_j, x_{j+1}$ . Determine o valor máximo do espaçamento  $h$  para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo  $[0, 1]$  seja inferior a  $10^{-6}$ .

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$

$x_i$	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f_i$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

- (a) Obter  $f(0.47)$  usando um polinómio de grau 2.
- (b) Admitindo que  $f \in C^3([0, 1])$  e que  $\max_{x \in [0, 1]} |f^{(3)}(x)| = M$ , calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

6. Sejam  $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$  os polinómios de Lagrange de grau  $n$  associados aos nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) - 1$$

Prove que

- (a)  $g$  é um polinómio de grau  $\leq n$ .
- (b)  $g(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ .
- (c)  $g(x) = 0$ , para todo o  $x$ .

(EXAME 18.01.93)

## IV.2 - Método dos mínimos quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

$x_i$	1.0	1.2	1.5	1.6
$f_i$	5.44	6.64	8.96	9.91

- (a) Obtenha o polinómio do 1º grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.
- (b) Idem, mas para o polinómio do 2º grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de  $f(1.4)$ .
- (c) Admitindo que  $|f'(x) - g'(x)| \leq M, \forall x \in [1.2, 1.5]$  obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior. SUGESTÃO: use o Teorema de Lagrange
- (d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3º grau?

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$

$x_i$	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes  $A, B$  pelo método dos mínimos quadrados. (*sugestão: poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis*)

(EXAME 18.01.93)

### EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

3. Determine a função da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x}$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

$x_i$	0	0.5	1.0
$f_i$	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

(EXAME 8.07.94)

4. Seja  $f$  tal que  $f(-2) = 3$ ,  $f(0) = 6$  e  $f(2) = 15$ . Obtenha a função do tipo  $g(x) = ax + b$  que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^3 (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam  $\alpha, \beta$  constantes reais. (EXAME 06.07.92)

# Capítulo V

## Integração numérica

1. Considere o integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- (a) Determine o seu valor aproximado, considerando quatro subintervalos e utilizando:
- A regra dos trapézios.
  - A regra de Simpson.
- (b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a  $10^{-4}$ , utilizando
- A regra dos trapézios.
  - A regra de Simpson.
2. Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo  $[-1, 1]$ , i.e. uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

- (a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular  $A_0$  e  $A_1$  de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.
- (b) Resolva o sistema em ordem a  $A_0$  e  $A_1$ .
- (c) Mostre que, se  $x_0$  e  $x_1$  forem tais que  $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$ , a fórmula de integração assim, obtida tem, pelo menos, grau 2.
3. Suponha que a função  $f$  é definida no intervalo  $[0, a]$ , do seguinte modo

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & 1 \leq x \leq a \end{cases}$$

- (a) Obtenha aproximações para o integral  $I(f) = \int_0^a f(x) dx$ , com  $a = 2$  e  $a = 3$ , dos seguintes modos:
- Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo  $h = 1$ .
  - Utilizando a regra de Simpson (simples).
- (b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de  $I(f)$ .
- (c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra de Simpson? Justifique.

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

4. Demonstre que na regra de integração do ponto médio se tem:

$$\int_{x_0 - \frac{h}{2}}^{x_0 + \frac{h}{2}} f(x) dx = hf(x_0) + E(f),$$

onde  $E(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24}$  e  $\theta \in (x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2})$ .

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f(x)$

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

- (a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau  $\leq 2$ ,  $p_2(x)$ , que interpola  $f(x)$  nos pontos  $x_0 = -2$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 2$ .
- (b) Suponha que pretendemos aproximar o valor  $I(f) = \int_{-2}^2 f(x) dx$  por  $\int_{-2}^2 p_2(x) dx$ . Sabendo que as derivadas de  $f$  verificam  $|f^{(j)}(x)| \leq j/2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  no intervalo  $[-2, 2]$ , determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

(EXAME 4.07.97)

6. Pretende-se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$Q(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1)$$

para aproximar o integral

$$I = \int_0^1 e^x g(x) dx.$$

- (a) Calcule  $A_0$  e  $A_1$  de modo a que a fórmula seja exacta para funções  $g(x) = a + bx$  ( $a$  e  $b$  reais).
- (b) Seja  $g(x) = \sin x$ . Obtenha uma aproximação de  $I$  usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.
- (c) Determine um valor aproximado para  $I$  usando a regra dos Trapézios composta com **4 subintervalos**.
- (d) Determine o número mínimo de subintervalos necessário na regra dos Trapézios composta, para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a  $10^{-2}$  (despreze erros de arredondamento).
7. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral  $I(f)$  de uma certa função  $f$  indefinidamente diferenciável.

$n$	8	16	32	64
$I_n$	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor  $I_n$  representa a **aproximação** obtida, com  $n + 1$  nós de integração. Sabendo que o **valor exacto** do integral  $I(f) = 267.25$ , diga, justificando, que fórmula poderá ter sido utilizada ( Trap. ou Simp.).

## Capítulo VI

# Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}y'(x) &= 1 - x + 4y(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\y(0) &= 1,\end{aligned}$$

com solução exacta  $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16)e^{4x}$ .

- Obtenha um valor aproximado  $y_2$  para  $y(0.2)$  usando o método de Euler com passo  $h = 0.1$ .
  - Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para  $|y(0.2) - y_2|$ . Compare com o valor do erro de facto cometido.
  - Utilize o método de Taylor de ordem 2, com  $h = 0.1$ , para obter uma aproximação de  $y(0.2)$ . Compare com o resultado obtido em a).
2. Utilize o método de Runge-Kutta de ordem 2 (método do ponto médio) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto  $x = 0.1$  com espaçamentos  $h = 0.1, 0.05, 0.025$ . Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por  $y(x) = \exp(x) - 1 - x$ , compare os resultados obtidos com o valor exacto de  $y(0.1)$ . Comente.

3. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \frac{y(x)}{x}, & 2 \leq x \leq 3, \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

determine um valor aproximado de  $y(2.1)$  pelo método de Euler com  $h = 0.1, 0.05, 0.025$ .

4. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

obtenha uma aproximação de  $y(0.2)$  usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, com  $h = 0.2$ .

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

5. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

com solução exacta  $y(x) = \exp(0.04x)$ , estime  $y(1)$  pelos métodos de Taylor de ordem 2 e pelo método do ponto médio com  $h = 1, 0.5, 0.25$ . Com que método e com que espaçamento obteve uma melhor aproximação?

6. Verifique que o método do ponto médio quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nos fornece

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Aplique este método para obter uma solução aproximada de  $y(10)$  e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a solução do problema anterior é  $y(x) = \exp(-20x)$ .
- (b) Se  $n$  for muito grande, o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge Kutta?

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS EM EXAMES:

1. Considere a equação

$$f(x) = x^2 - \cos^2(x) = 0. \tag{3}$$

- (a) Mostre que a equação (1) tem (apenas) duas raízes.
- (b) Para resolver numericamente a equação (1) vai-se considerar um método do ponto fixo associado a uma função iteradora da forma  $g(x) = x + A(x)(\cos(x) - x)$ , onde  $A(x)$  é uma função que nunca se anula.
  - i. Mostre que as raízes da equação (1) e os pontos fixos de  $g$  coincidem para  $x > 0$ .

- ii. Fazendo  $A(x) = 1/2$ , prove que o método do ponto fixo associado a  $g$  converge para a raiz  $z$  pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0$  escolhida nesse intervalo.
- iii. Utilizando o método obtido em a) e  $x_0 = 1$ , calcule uma aproximação  $x_{k+1}$  da raiz  $z$ , parando a iteração quando  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$ . Indique ainda uma estimativa para o erro  $|z - x_{k+1}|$ .
- iv. Determine a ordem de convergência  $p$  do método e uma aproximação da constante  $K_\infty$ , tal que seja verificada a igualdade assintótica

$$|z - x_{m+1}| \approx K_\infty |z - x_m|^p, \quad m \text{ suf. grande}$$

2. Considere a equação  $F(x) = 0$ , onde  $F(x) = (x - \alpha)^m h(x)$ , ( $m > 1$  inteiro), com  $h(\alpha) \neq 0$  e tal que  $h$  é uma função de classe  $C^2$  num intervalo aberto contendo  $\alpha$ . Prove que o método iterativo  $x_{m+1} = g(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , em que

$$g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

converge para  $\alpha$  se a aproximação inicial  $x_0$  estiver suficientemente próxima de  $\alpha$ . Determine a ordem de convergência do método e o factor assintótico da convergência.

3. Considere a equação

$$\sin(x) + 1 - ax = 0$$

onde  $a$  é um número real conhecido.

- (a) Diga, justificando, para que valores de  $a$  esta equação tem uma única raiz no intervalo  $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ .
- (b) Para os valores de  $a$  considerados na alínea anterior, mostre que o método do ponto fixo, com a função iteradora  $g(x) = \frac{1 + \sin(x)}{a}$ , converge para a  $z$ , qualquer que seja  $x_0 \in I$ .
- (c) No caso de  $a = 2$ , diga qual o número mínimo de iterações do método do ponto fixo que deverá efectuar para garantir que o erro absoluto da aproximação obtida seja inferior a  $10^{-3}$  se  $x_0$  é qualquer número em  $I$ .
- (d) No caso de  $a = 0$ , mostre que a equação tem uma única raiz  $w$  no intervalo  $[-\pi, 0]$ . Mostre que, se  $x_0$  estiver suficientemente próximo da raiz, então o método de Newton converge para  $z$ , e determine a ordem de convergência.

4. Considere a família de sucessões da forma

$$x_{m+1} = \frac{\lambda x_m + 1 - \sin(x_m)}{1 + \lambda}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

com  $\lambda$  parâmetro real.

- (a) Faça  $\lambda = 1$  e, usando o teorema do ponto fixo, mostre que a sucessão (1) converge para um certo valor real  $z$ , qualquer que seja  $x_0$  pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ . Qual a ordem de convergência deste método iterativo ?
- (b) Conclua, utilizando a questão anterior, que  $z$  é a única raiz da equação  $1 - x - \sin x = 0$  no intervalo  $[0, 1]$ . Utilizando o método obtido em a) e  $x_0 = 1$ , determine, sem efectuar iterações, qual o valor de  $k$  de modo que se tenha  $|z - x_k| < 10^{-5}$ .
- (c) Como deveria ser  $\lambda$  por forma a sucessão (1) convergir para  $z$  o mais rápido possível? Qual a ordem de convergência nesse caso? [1.0]
5. Prove que, com  $x_0 = 1$ , o método de Newton aplicado à equação  $1 - x - \sin x = 0$  converge para a única raiz  $z$  da equação .
6. Considere a família de funções da forma

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \left[ (\alpha - 1)x + \frac{78.8}{x} \right], \quad (5)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro real.

- (a) Mostre que os pontos fixos de  $g_\alpha$  são as raízes da equação  $x^2 - 78.8 = 0$ , independentemente do valor do parâmetro  $\alpha$ .
- (b) Com o objectivo de aproximar a **raiz positiva**  $z$  dessa equação, considere a iteração do ponto fixo,  $x_{m+1} = g_\alpha(x_m)$ , associada a (5). A tabela seguinte mostra algumas iteradas das sucessões correspondentes aos valores  $\alpha = 3/2$  e  $\alpha = 1/2$ , com iterada inicial  $x_0 = 9$ .

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$x_{m+1} = g_{3/2}(x_m)$	8.837037	8.890356	?	8.78425	8.876441	8.877102
$x_{m+1} = g_{1/2}(x_m)$	8.51111	10.00586	5.74491	21.68807	-14.42104	3.49320

- i. No caso de  $\alpha = 3/2$ , preencha o espaço em branco (obtenha  $x_3$ ). Diga o que indicam os resultados, no que respeita à convergência ou divergência das sucessões para a raiz  $z$  acima referida. **Confirme teoricamente**, em cada caso.
- ii. No caso de  $\alpha = 3/2$ , ob obtenha um majorante para o erro absoluto da iterada  $x_3$ .
- iii. Como deveria escolher  $\alpha$  de modo a obter convergência quadrática, supondo  $x_0$  suf. próximo de  $z$  ?
7. Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f(x)$

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

- (a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau  $\leq 2$ ,  $p_2(x)$ , que interpola  $f(x)$  nos pontos  $x_0 = -2$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 2$ .

- (b) Suponha que pretendemos aproximar o valor  $I(f) = \int_{-2}^2 f(x)dx$  por  $\int_{-2}^2 p_2(x)dx$ . Sabendo que as derivadas de  $f$  verificam  $|f^{(j)}(x)| \leq j/2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  no intervalo  $[-2, 2]$ , determine um majorante para o erro de integração. Justifique.
- (c) Determine uma aproximação para  $I(f) = \int_{-2}^2 f(x)dx$  usando a regra de Simpson composta e todos os pontos da tabela.

8. Considere-se a função  $f$  dada pela tabela

$x_i$	0	1	2
$f_i$	1	1	2

a) Obtenha um valor aproximado de  $f(1.5)$  utilizando:

- i) um spline de grau 1.  
 ii) um polinómio interpolador de grau 2.  
 ii) Sabendo que  $f$  é um polinómio do tipo

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

determine uma expressão do erro da última aproximação obtida, em função dos coeficientes de  $f$ .

b. Obtenha a função  $g$ , do tipo  $g(x) = \beta x(x-1) + \alpha$ , que melhor se ajusta a  $f$  (dada na tabela acima), no sentido dos mínimos quadrados. **3.** Pelo método dos coeficientes indeterminados, pretende-se obter uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_Q(f) = A_0f(0) + A_1f(1) + A_2f(2)$$

que lhe permita calcular o integral  $I(f) = \int_{-1}^3 f(x)dx$ .

- i) Obtenha os parâmetros  $A_0, A_1$  e  $A_2$  de modo que  $I_Q(f)$  tenha grau de precisão  $r \geq 2$ .
- ii) Obtenha o valor aproximado do integral, no caso de  $f$  ser a função tabelada.
- iii) Seja  $f$  um polinómio de grau não superior a 3. Prove que o valor obtido pela regra considerada na alínea a) é o mesmo que se obteria pela regra de Simpson.

# FORMULÁRIO

## 2 Resolução de Equações não lineares

### Métodos Iterativos

Método da secante:

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m) \frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}$$

$$e_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(\eta_m)} e_{m-1} e_m$$

$$\eta_m \in \text{int}(x_{m-1}, x_m) \quad \xi_m \in \text{int}(x_{m-1}, x_m, z)$$

Método de Newton:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

$$e_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(x_m)} e_m^2 \quad \xi_m \in \text{int}(z, x_m)$$

Método do ponto fixo:

$$x_{m+1} = g(x_m)$$

$$|e_{m+1}| \leq L|e_m|$$

$$|e_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L} |x_{m+1} - x_m|$$

$$e_{m+1} = \frac{(-1)^{p-1} g^{(p)}(\xi_m)}{p!} e_m^p \quad \xi_m \in \text{int}(z, x_m)$$

$$g^{(r)}(z) = 0 \quad r = 0, \dots, p-1 \quad g^{(p)}(z) \neq 0$$

## 3 Resolução de Sistemas

### Sistemas Lineares

Normas e Condicionamento:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = (\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}))^{1/2}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \|\delta_{\mathbf{b}}\|$$

## Métodos Iterativos para Sist. Lineares

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{C} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$$

Método de Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

Método de Gauss-Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

## Métodos Iterativos para Sist. Não-Lineares

Método de Newton:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

## 4 Aproximação de funções

### 4.1 Interpolação Polinomial

Fórmula de Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fórmula de Newton com dif. divididas:

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f[x_0, \dots, x_i] (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})$$

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi \in \text{int}(x_0, \dots, x_n, x)$$

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}$$

### 4.2 Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & \cdots & (\phi_0, \phi_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_m, \phi_0) & \cdots & (\phi_m, \phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \vdots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

## 5 Integração Numérica

Regra dos trapézios:

$$T(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)[f(a) + f(b)]$$

$$E^T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

$$T_N(f) = h \left[ (f_0 + f_N)/2 + \sum_{i=1}^{N-1} f_i \right]$$

$$E_N^T(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^N f''(\xi_i) = -\frac{Nh^3}{12} f''(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

Regra de Simpson:

$$S(f) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)] = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$E^S(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

$$S_N(f) = \frac{h}{3} \left[ (f_0 + f_N) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} f_{2i} \right]$$

$$E_N^S(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{N/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{Nh^5}{180} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (a, b)$$

## 6 Métodos numéricos para equações diferenciais

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (\text{Método de Euler})$$

$$T_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \xi_n \in (x_n, x_{n+1}), \quad |e_n| = |y(x_n) - y_n| \leq \frac{hY_2}{2K} (e^{K(x_n-x_0)} - 1).$$

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) \quad (\text{Método do ponto médio (ou Euler modificado)})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \quad (\text{Método de Heun})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} [f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))]$$

Método de Runge-Kutta de ordem 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4)$$

$$V_1 = f(x_n, y_n) \quad V_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}V_1\right)$$

$$V_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}V_2\right) \quad V_4 = f(x_n + h, y_n + hV_3)$$