

Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e LERCI - 2º Semestre 2003/2004

Métodos iterativos para equações não lineares

1. Considere a função de variável real

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

e a sucessão numérica $\{x_m\}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \dots$

- (a) Mostre que esta sucessão tem limite $z \in [0, 1]$, independente de $x_0 \in [0, 1]$.
(b) Partindo de $x_0 = 0$, calcule x_5 e determine um majorante de $|z - x_5|$.

2. Considere a iteração do ponto fixo

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

com função iteradora $g(x) = 1 + \arctan(x)$.

- (a) Indique um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas para a função g .
(b) Aproxime o ponto fixo de g com erro inferior a 10^{-6} . Qual a ordem de convergência da iteração?

3. Calcule um valor aproximado de $\sqrt{10}$ usando o seguinte método numérico

$$x_{m+1} = \frac{30x_m + x_m^3}{10 + 3x_m^2}.$$

Mostre que a ordem de convergência deste método é 3.

4. Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = \phi(x)$ pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4} . Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \qquad x_5 = 0.43814$$

Sabendo que $|\phi'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

5. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \tag{1}$$

que tem apenas três raízes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, tal que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

- (a) Para aproximar as raízes positivas da equação (1), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$$

- i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g .
 - ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2 , qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.
- (b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.
- (c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.