Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI - 3 de Maio de 2004

1. Considere a seguinte equação
$$x - \cos(e^{-x}) = 0$$
que tem uma e uma só solução $z \in [0.8, 1.0]$.

   (a) Mostre que a sucessão
   $$x_{n+1} = \cos(e^{-x_n}), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$
   converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [0.8, 1.0]$.
   Resolução: Começamos por observar que
   $$z - \cos(e^{-z}) = 0 \Longleftrightarrow z = \cos(e^{-z}) \Longleftrightarrow z = g(z)$$
   para $g(x) := \cos(e^{-x})$.
   Tem-se $g \in C^2([0.8, 1.0])$ com
   $$g'(x) = e^{-x}\sin(e^{-x}),$$
   $$g''(x) = -e^{-x}\sin(e^{-x}) - e^{-2x}\cos(e^{-x}) = -e^{-x}(\sin(e^{-x}) + e^{-x}\cos(e^{-x})).$$
   Como $g' > 0$ em $[0.8, 1.0]$, a função g é crescente em $[0.8, 1.0]$, pelo que
   $$g(0.8) \leq g(x) \leq g(1.0), \ \forall x \in [0.8, 1.0].$$
   Sendo
   $$g(0.8) = 0.900739 \in [0.8, 1.0],$$
   $$g(1.0) = 0.933092 \in [0.8, 1.0],$$
   conclui-se que $g(x) \in [0.8, 1.0]$, para todo o $x \in [0.8, 1.0]$, ou seja, $g([0.8, 1.0]) \subseteq [0.8, 1.0]$.
   Por outro lado, tem-se $g'' < 0$ em $[0.8, 1.0]$, donde a função g' é decrescente em $[0.8, 1.0]$. Relembrando que $g' > 0$ em $[0.8, 1.0]$, obtém-se
   $$\max_{x\in[0.8,1.0]} |g'(x)| = \max_{x\in[0.8,1.0]} g'(x) = g'(0.8) = 0.195171,$$
   ou seja, $L := \max_{x\in[0.8,1.0]} |g'(x)| < 1$.
   Pelo Teorema do ponto fixo, g tem um e um só ponto fixo em $[0.8, 1.0]$, que como vimos é a solução z da equação, e a sucessão (x_n) converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [0.8, 1.0]$.

   (b) Usando a sucessão (1), calcule um valor aproximado de z com erro absoluto inferior a 10^{-2}.
   Resolução: Da alínea anterior, tem-se $L = 0.195171$ e a fórmula de majoração do erro
   $$|z - x_n| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|, \ n = 1, 2, ...$$
   fica
   $$|z - x_n| \leq 0.2425|x_n - x_{n-1}|, \ n = 1, 2, ...$$
   Com $x_0 = 0.8$ obtemos
   $$x_1 = g(x_0) = 0.900739,$$
   $$x_2 = g(x_1) = 0.918602,$$
   e
   $$|z - x_2| \leq 0.2425|x_2 - x_1| = 0.2425|0.918602 - 0.900739| = 0.00433178 < 10^{-2}.$$
   Assim, $z \simeq 0.918602$ com erro absoluto inferior a 10^{-2}.

(c) A execução de

```
f[x_ ]:=x-Cos[Exp[-x]];
NestList[(#-f[#]/f'[#])&,0.8,4]
```
(2)

produziu o seguinte output

$$\{0.8, 0.925168, 0.920854, 0.921936, 0.921935\}. \tag{3}$$

i. Qual a ordem de convergência do método implementado em (2)? Justifique.
Resolução: O programa corresponde ao cálculo das quatro primeiras iteradas do método de Newton para a resolução de $f(x) = 0$, com $f(x) := x - \cos(e^{-x})$, tomando como iterada inicial $x_0 = 0.8$.
Sabemos que a sucessão gerada pelo método de Newton verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^2} = \frac{|f''(z)|}{2|f'(z)|}$$

se $f'(z) \neq 0$. Portanto, se $f''(z) \neq 0$, o método de Newton tem convergência quadrática. Basta então verificar que

$$f'(z) = 1 + e^{-z}\sin(e^{-z}) > 0,$$
$$f''(z) = -e^{-z}(\sin(e^{-z}) + e^{-z}\cos(e^{-z})) < 0.$$

ii. Com base no output (3), calcule uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência do método a que se refere o ponto anterior.
Resolução: O coeficiente assimptótico de convergência do método de Newton é dado por

$$K_\infty = \frac{|f''(z)|}{2|f'(z)|}.$$

Usando a aproximação $z \simeq 0.918602$ calculada na alínea (b) obtém-se

$$K_\infty \simeq \frac{|f''(0.918602)|}{2|f'(0.918602)|} = 0.0548424.$$

2. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Justifique que o sistema tem solução única e que o método de Jacobi é convergente.
Resolução: A matriz do sistema tem diagonal principal estritamente dominante por linhas (e por colunas):

$$|5| > |2| + |-1|,$$
$$|5| > |-1| + |2|,$$
$$|5| > |-1| + |-1|.$$

Logo, o sistema tem solução única e o método de Jacobi é convergente, qualquer que seja a aproximação inicial considerada.

(b) Partindo de $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, efectue duas iterações do método de Jacobi e calcule um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.
Resolução: Começamos por escrever

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0.8 - 0.4x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 = 0.4 + 0.2x_1 - 0.4x_3 \\ x_3 = 0.2 + 0.2x_1 + 0.2x_2 \end{cases}$$

O método de Jacobi fica

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0, \\ x_1^{(n+1)} = 0.8 - 0.4x_2^{(n)} + 0.2x_3^{(n)}, \\ x_2^{(n+1)} = 0.4 + 0.2x_1^{(n)} - 0.3x_3^{(n)}, \\ x_3^{(n+1)} = 0.2 + 0.2x_1^{(n)} + 0.2x_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, ... \end{cases}$$

e as duas primeiras iterações são

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= [0.8, 0.4, 0.2]^T, \\ x^{(2)} &= [0.68, 0.48, 0.44]^T. \end{aligned}$$

Um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_\infty$ pode ser obtido pela fórmula de erro

$$\|x - x^{(2)}\|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty} \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty,$$

onde C é a matriz de iteração do método de Jacobi, ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} &\|C\|_\infty = 0.6 \\ &\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \|[-0.12, 0.08, 0.24]^T\|_\infty \end{aligned}$$

donde

$$\|x - x^{(2)}\|_\infty \leq 0.36.$$

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional
LEGI

3 de Maio de 2004

Justifique todas as respostas

1. Considere a equação

$$x^2 - \log x - 2 = 0.$$

que tem uma solução $z \in [1.54, 1.6]$.

(a) A execução de

```
NestList[((Log[#]+2)/#)&,1.6,7]
```

produziu o seguinte output:

$$\{1.6, 1.54375, 1.57682, 1.55719, 1.56877, 1.56192, 1.56597, 1.56357\}$$

Com base neste resultado, obtenha um majorante do erro $|z - 1.56357|$.
Resolução: Trata-se da implementação do método do ponto fixo

$$\begin{cases} x_0 = 1.6 \\ x_{n+1} = \dfrac{\log(x_n) + 2}{x_n},\ n = 0, 1, ... \end{cases}$$

e do cálculo das sete primeiras iteradas deste método. Sendo $G(x) := \frac{\log(x)+2}{x}$, tem-se que z é ponto fixo de G pois

$$z^2 - \log z - 2 = 0 \Longleftrightarrow z^2 = \log z + 2 \Longleftrightarrow z = \frac{\log(z) + 2}{z}.$$

Do output conclui-se que $1.56357 = x_7$.
Sabemos que as iteradas do método do ponto fixo satisfazem

$$|z - x_n| \leq \frac{L}{1 - L}|x_n - x_{n-1}|,\ n = 1, 2, ...$$

com $L := \max_{x \in [1.54, 1.6]} |G'(x)|$. Neste caso,

$$G'(x) = -\frac{\log(x) + 1}{x^2},$$
$$G''(x) = \frac{2\log(x) + 1}{x^3}.$$

É fácil ver que $G' < 0$ em $[1.54, 1.6]$. Além disso, como $G'' > 0$ em $[1.54, 1.6]$, a função G' é crescente em $[1.54, 1.6]$. Assim, $|G'| = -G'$ é decrescente em $[1.54, 1.6]$ e tem-se

$$L := \max_{x \in [1.54, 1.6]} |G'(x)| = |G'(1.54)| = 0.60372.$$

Atendendo a que $x_6 = 1.56597$, vem

$$|z - 1.56357| = |z - x_7| \leq \frac{L}{1 - L}|x_7 - x_6| = \frac{0.60372}{1 - 0.60372}|1.56357 - 1.56597| = 0.00365632.$$

(b) Utilizando um método com convergência quadrática, obtenha um valor aproximado de z, efectuando duas iterações a partir de $x_0 = 1.5$.
Resolução: Seja $f(x) := x^2 - \log x - 2$. A função f é de classe C^2 e tem-se

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x},$$
$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Como
1. $f(1.5)f(1.6) < 0$;
2. $f''(x) > 0$, $\forall x \in [1.5, 1.6]$;
3. $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [1.5, 1.6]$, pois $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}/2 = \pm 0.707107$;
4. $|f(1.5)/f'(1.5)| < 0.1$ e $|f(1.6)/f'(1.6)| < 0.1$
conclui-se que o método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, ...$$

converge quadraticamente para z e tem convergência quadrática. Tomando $x_0 = 1.5$ obtém-se

$$x_1 = 1.56663,$$
$$x_2 = 1.56446.$$

(c) Poderia usar o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = \exp(x^2 - 2)$ para aproximar z?
Resolução: Começamos por verificar que z é ponto fixo de g. De facto,

$$z^2 - \log z - 2 = 0 \Longleftrightarrow \log z = z^2 - 2 \Longleftrightarrow z = \exp(z^2 - 2) \Longleftrightarrow z = g(z).$$

Tem-se $g'(x) = 2x \exp(x^2 - 2) > 0$, para todo o $x \in [1.54, 1.6]$, e g' é crescente em $[1.54, 1.6]$. Logo

$$|g'(z)| = g'(z) = g'(1.54) = 4.46616.$$

Como $|g'(z)| > 1$ o método do ponto fixo com função iteradora g não converge para z.

2. Pretende-se aplicar o método numérico

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 1.5, \quad x_3^{(0)} = 1.5, \quad x_4^{(0)} = 1, \\ x_1^{(n+1)} = 1 + 0.25\left(x_2^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_2^{(n+1)} = 0.5 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_3^{(n+1)} = 0.25 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_4^{(n+1)} = 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, ... \end{cases} \tag{4}$$

ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Pode-se garantir a convergência do método (4) para a solução do sistema?
Resolução: Trata-se do método de Jacobi. A matriz do sistema tem diagonal principal estritamente dominante pois

$$|4| > |-1| + |-1| + |-1|,$$

para todas as linhas e todas as colunas. Logo, o método de Jacobi é convergente.

(b) Efectue duas iterações do método (4) e calcule um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_1$.
Resolução: As duas primeiras iteradas do método de Jacobi são

$$x^{(1)} = [2, 1.625, 1.375, 1.25]^T,$$
$$x^{(2)} = [2.0625, 1.65625, 1.46875, 1.25]^T.$$

A matriz de iteração do método de Jacobi neste caso é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $\|C\|_1 = 0.75$. Um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_1$ pode ser calculado a partir de

$$\|x - x^{(2)}\|_1 \leq \frac{C}{1 - C}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_1$$

e como $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_1 = \|[0.0625, 0.03125, 0.09375, 0]^T\|_1$ obtém-se

$$\|x - x^{(2)}\|_1 \leq \frac{0.75}{1 - 0.75}0.1875 = 0.5626.$$

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI e LEE - 26 de Abril de 2006

Justifique todas as respostas.

1. A equação

$$0.75 + x = \exp(-x^2)$$

tem uma única raiz, z, que pertence ao intervalo $[0, 0.5]$.

(a) Mostre que o método da secante converge para z, quaisquer que sejam as aproximações iniciais escolhidas no intervalo $[0, 0.5]$.

Resolução: A equação é equivalente a $f(x) = 0$, com $f(x) := 0.75 + x - \exp(-x^2)$. A função f é de classe C^2 no intervalo $[0, 0.5]$ e tem-se

$$f'(x) = 1 + 2x\exp(-x^2),$$
$$f''(x) = 2(1 - 2x^2)\exp(-x^2).$$

Atendendo a que

1. $f(0)f(0.5) = (-0.25)0.471199 < 0$;
2. $f'(x) > 0$, $\forall x \in [0, 0.5]$;
3. $f''(x) > 0$, $\forall x \in [0, 0.5]$, pois $(1 - 2x^2) > 0$, se $x \in [0, 0.5]$;
4. $|f(0)/f'(0)| = 0.25 < 0.5$ e $|f(0.5)/f'(0.5)| = 0.264897 < 0.5$;

o método da secante converge para z quaisquer que sejam $x_{-1}, x_0 \in [0, 0.5]$.

(b) Calcule duas iterações do método da secante para aproximar z.

Resolução: Tomando $x_{-1} = 0$ e $x_0 = 0.5$, de

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 0, 1, ...$$

obtém-se

$$x_1 = 0.173322,$$
$$x_2 = 0.2029995.$$

(c) Mostre que o método iterativo

$$x_{n+1} = \exp(-x_n^2) - 0.75, \quad n = 0, 1, ...$$

converge para z, qualquer que seja x_0 no intervalo $[0, 0.5]$.

Resolução: Começamos por notar que

$$0.75 + x = \exp(-x^2) \Longleftrightarrow x = \exp(-x^2) - 0.75$$

ou seja, z é ponto fixo de $G(x) := \exp(-x^2) - 0.75$. Esta função é de classe C^1 em $[0, 0.5]$ com

$$G'(x) = -2x\exp(-x^2).$$

Como G é decrescente em $[0, 0.5]$ e

$$G(0) = 0.25 \in [0, 0.5],$$
$$G(0.5) = 0.0288008 \in [0, 0.5]$$

tem-se $G(x) \in [0, 0.5]$, para todo o $x \in [0, 0.5]$, o que significa que $G([0, 0.5]) \subseteq [0, 0.5]$.

Sendo

$$G''(x) = -2\exp(-x^2) + 4x^2\exp(-x^2) = (4x^2-2)\exp(-x^2) < 0,\ \forall x \in [0, 0.5],$$

a função G' é decrescente em $[0, 0.5]$. Além disso, $G' < 0$ em $[0, 0.5]$, pelo que $|G'| = -G'$ e $|G'|$ é crescente em $[0, 0.5]$. Consequentemente

$$\max_{x\in[0,0.5]} |G'(x)| = \max_{x\in[0,0.5]} |G'(x)| = |G'(0.5)| = 0.778801,$$

ou seja $L := \max_{x\in[0,0.5]} |G'(x)| < 1$.

Pelo Teorema do ponto fixo, o método do ponto fixo dado converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [0, 0.5]$.

(d) A execução no *Mathematica* de

$$\text{NestList}[(\text{Exp}[-\#\text{^}2] - 0.75)\&,\ 0.5,\ 7]$$

produziu o seguinte output

$$\{0.5, 0.0288008, 0.249171, 0.189802, 0.214616, 0.204984, 0.208852, 0.207319\}.$$

Usando este resultado, calcule um majorante do erro $|z - x_7|$.

Resolução: O programa calcula as sete primeiras iteradas do método do ponto fixo dado na alínea (c), com iterada inicial $x_0 = 0.5$. Pelo output temos

$$x_7 = 0.207319,$$
$$x_6 = 0.208852.$$

A fórmula de majoração do erro

$$|z - x_n| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|,\ n = 0, 1, ...$$

com $n = 7$ e $L = 0.778801$ (obtido na alínea anterior) fornece

$$|z - x_7| \leq \frac{0.778801}{1 - 0.778801}|0.207319 - 0.208852| = 0.00539741.$$

(e) i. Mostre que z é ponto fixo da função $g(x) = 2\exp(-x^2) - x - 1.5$.

Resolução: Basta ver que

$$0.75 + x = \exp(-x^2) \iff 1.5 + 2x = 2\exp(-x^2) \iff x = 2\exp(-x^2) - x - 1.5,$$

donde z é ponto fixo de g.

ii. O método iterativo

$$x_{n+1} = 2\exp(-x_n^2) - x_n - 1.5 \quad n = 0, 1, ...$$

pode ser usado para aproximar z?

Resolução: Tem-se $g'(x) = -4x\exp(-x^2) - 1$ e como z é positivo,

$$|g'(z)| = 4z\exp(-z^2) + 1 > 1.$$

Então o método do ponto fixo com função iteradora g não pode ser usado para aproximar z.

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que L e U resultam da factorização de Doolittle de A.

Resolução: Como L é triangular superior com diagonal principal unitária, U é triangular superior e

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

conclui-se que L e U resultam da factorização de Doolittle de A.

(b) Usando essa factorização, resolva o sistema $Ax = b$, em que

$$b_i = \sin(i\pi/2), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Resolução: Começamos por ver que

$$b = [1, 0, -1, 0]^T.$$

Tendo em conta a factorização de $A = LU$, a resolução do sistema faz-se do seguinte modo

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y. \end{cases}$$

Ora

$$Ly = b \Longleftrightarrow y = \left[1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right]^T$$

e

$$Ux = y \Longleftrightarrow x = \left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right]^T.$$