1° Trabalho de Matemática Computacional

LEGI e **LCERCI** - 2° Semestre 2006/2007

1ª Parte

1. Considere a equação

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

e suponha que f é contínua e injectiva em $I := [a, b]$ com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. O **método da falsa posição** permite aproximar a solução $z \in I$ da equação (1) e consiste no seguinte. Em cada passo, determina-se $x \in I$ tal que $(x, 0)$ pertença ao gráfico da recta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Em seguida, calcula-se $f(x)$, havendo três possibilidades: $f(x) = 0$, ou seja, x é a solução de (1); $f(x) > 0$ e repete-se o processo em $[a, x]$; $f(x) < 0$ e repete-se o processo em $[x, b]$. Constrói-se assim três sucessões $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definidas por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_0 = a, \qquad b_0 = b \\ x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{k+1} = \begin{cases} a_k, \text{ se } f(x_k) > 0 \\ x_k, \text{ se } f(x_k) \leq 0 \end{cases}, \qquad b_{k+1} = \begin{cases} x_k, \text{ se } f(x_k) \geq 0 \\ b_k, \text{ se } f(x_k) < 0 \end{cases} \\ x_{k+1} = \begin{cases} x_k, \text{ se } f(x_k) = 0, \\ \dfrac{a_{k+1} f(b_{k+1}) - b_{k+1} f(a_{k+1})}{f(b_{k+1}) - f(a_{k+1})}, \text{ se } f(x_k) \neq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Tal como o método da bissecção, o método da falsa posição é aplicável sob hipóteses bastante fracas: continuidade de f em I, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Escreva um programa *Mathematica* para resolver a equação (1) pelo método da falsa posição. Os dados são a função f, o intervalo $[a, b]$, uma tolerância de erro ϵ e o número máximo de iterações m. O resultado pretendido é a lista das iteradas do método. O critério de paragem a usar é

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \epsilon.$$

2. Considere agora o método

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - 0.5 f(x_k) f''(x_k)}, \ k = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

para a resolução numérica da equação (1) quando f é de classe C^2 numa vizinhança da solução z.

(a) Sendo z uma solução de (1) e f de classe C^5 numa vizinhança da solução z, determine a ordem de convergência do método (2).

(b) Escreva um programa *Mathematica* para resolver a equação (1) pelo método (2). Os dados são a função f, uma aproximação inicial x_0, uma tolerância de erro ϵ e o número máximo de iterações m. O resultado pretendido é a lista das iteradas do método. O critério de paragem a usar é

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \epsilon.$$

(c) Teste os programas anteriores para as equações dos exercícios resolvidos nas aulas, apresentando os resultados com 20 dígitos decimais.

3. Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz tridiagonal, ou seja,

$$a_{ij} = 0, \text{ se } |i - j| > 1.$$

Neste caso, na factorização de Doolittle de $\mathbf{A}$, as matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ são bidiagonais e o algoritmo da factorização reduz-se a

$$l_{11} = 1,\ l_{21} = a_{21},\ u_{11} = a_{11},\ u_{12} = a_{12}$$

$$\text{Para } k = 2, ..., n$$

$$l_{kk} = 1,\ u_{kk} = a_{kk} - l_{k,k-1}u_{k-1,k}$$

$$l_{k+1,k} = a_{k+1,k}/u_{kk},\ u_{k,k+1} = a_{k,k+1}$$

(a) Determine o número de operações elementares efectuadas na factorização de Doolittle de matrizes tridiagonais e na resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ quando $\mathbf{A}$ é tridiagonal.

(b) Escreva um programa *Mathematica* que receba uma matriz tridiagonal $\mathbf{A}$ e um vector $\mathbf{b}$, e forneça a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, através da factorização de Doolittle para matrizes tridiagonais.

2ª Parte (aplicação dos métodos implementados na 1ª Parte)

1. A velocidade ascendente de um projectil é dada em cada instante t por:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

onde u é a velocidade relativa ao projectil de expulsão dos gases, m_0 é a massa inicial do projectil, q é o coeficiente de consumo do combustível e $g = 9.8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade. Se $u = 2200$ m/s, $m_0 = 16 \times 10^4$kg e $q = 2680$Kg/s, determine em que instante t a velocidade atinge $v = 1000$m/s.

2. A distribuição de momento flector M numa viga de comprimento l com os extremos simplesmente apoiados e sob acção de uma carga externa w, pode ser aproximada em pontos $x_i = ih$, $i = 1, 2, ..., n$, com $h = l/n$, resolvendo o sistema linear

$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = hw_i,\ i = 1, ..., n-1,$$
$$M_0 = M_n = 0,$$

onde $M_i = M(x_i)$, $i = 0, ..., n$, e $w_i = w(x_i)$, $i = 1, ..., n-1$.

Usando a factorização de Doolittle para matrizes tridiagonais, determine o momento flector em cada ponto x_i, $i = 1, ..., 40$, de uma viga de comprimento 5 quando a carga externa é definida por $w(x) = \sin(\pi x)$.